DLACZEGO MATEMATYKA POZWALA ROZUMIEĆ I OPISYWAĆ ŚWIAT? REFLEKSJA FILOZOFICZNA

Roman Murawski

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Już potoczna obserwacja pokazuje, że matematyka jest wykorzystywana przez rozmaite nauki, zwłaszcza nauki przyrodnicze, w badaniu świata rzeczywistego, w tym świata fizycznego. Jest tak właściwie od starożytności. Już starożytni Egipcjanie i Babilończycy wykorzystywali matematykę w rozmaitych praktycznych celach, na przykład przy mierzeniu powierzchni pól uprawnych, budowie piramid itd. W starożytnej Grecji pojawiła się idea, że zjawiska przyrodnicze nie są wynikiem arbitralnych decyzji czy kaprysu bogów, ale podlegają z konieczności jakimś prawom – zapoczątkowało to proces demitologizacji przyrody i rozumowe badanie świata. Początkowo badania te miały charakter raczej jakościowy – tak było na przykład u Arystotelesa (por. jego fizykę). W czasach nowożytnych pojawia się nowoczesna, aktualna do dziś, metoda naukowa, łącząca eksperyment z rozumowaniem, matematyczne modelowanie z eksperymentem. Za jej ojca uznaje się Galileusza. U podstaw tej metody leży aktywna postawa badacza (w odróżnieniu od postawy uczonych wcześniejszych, zwłaszcza starożytnych i średniowiecznych, która charakteryzowała się kontemplacją natury). Jądrem nowej postawy jest dążenie do wyrażenia w sposób ścisły, w języku matematyki regularności w przyrodzie, czyli praw przyrody, oraz ich weryfikacja poprzez eksperyment. Galileusz pisał, że:

Księga natury pisana jest w języku matematycznym

oraz

Matematyka jest alfabetem, za pomocą którego Bóg opisał wszechświat.

Dzięki Galileuszowi fizyka nowożytna stała się teorią w pełni zmatematyzowaną. Można za Krzysztofem Maurinem powiedzieć, że dziś fizyka i matematyka stanowią w jakimś sensie jedność. Czy to tylko przypadek, kwestia kulturowa, skutek tego, że Galileusz zaproponował, żeby tak właśnie badać świat rzeczywisty i sposób ten okazał się skuteczny, czy też kryją się za tym głębsze racje i przyczyny?

Zauważmy, że matematykę stosuje się nie tylko w naukach przyrodniczych, w szczególności w fizyce, astronomii czy chemii oraz w inżynierii, ale także próbuje się ją stosować i w innych naukach: naukach społecznych (na przykład w socjologii), w biologii, w lingwistyce itd. Co więcej, uważa się, że matematyka nadaje tym naukom walor jeszcze większej „naukowości".

Pojawia się zatem pytanie: jak to się dzieje, że matematyka nadaje się do opisu świata, że jej twierdzenia, abstrakcyjne i oderwane od empirii, są doskonałym narzędziem opisu tegoż świata? Dlaczego twierdzenia matematyczne opisujące zależności między obiektami matematycznymi okazują się prawdziwe w świecie, pozwalają go opisywać, a nawet zmieniać i przekształcać, pozwalają konstruować nowe przedmioty i obiekty realne, które funkcjonują i służą człowiekowi? Jakie są związki między matematyką czystą a matematyką stosowaną, dlaczego twierdzenia matematyki, będącej *par excellence* nauką teoretyczną, można stosować do konkretnych problemów praktycznych?

Obecność matematyki w naukach może zadziwiać. Pojęcia matematyczne pojawiają się bowiem często w zupełnie nieoczekiwanych sytuacjach i związkach, pozwalając na nieoczekiwanie ścisły i dokładny opis zjawisk. Eugene Paul Wigner w pracy *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural science*[1] podaje przykład stwierdzenia z zakresu demografii (która korzysta w szczególności ze statystyki matematycznej)

[1] E.P. Wigner, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, „Communications on Pure and Applied Mathematics" nr 13, s. 1–14; przekład polski: *Niepojęta skuteczność matematyki w naukach przyrodniczych*, w: R. Murawski (red.), *Współczesna filozofia matematyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002, s. 293–309.

dotyczącego kwestii takich, jak zaludnienie, w którym to stwierdzeniu pojawia się symbol Π. Zdumiony czytelnik pyta, co może mieć wspólnego Π, czyli stosunek obwodu koła do jego średnicy z demografią? A jednak ma. Co to zatem znaczy, skąd to się bierze?

Wiele prostych pojęć matematycznych i wiele obiektów matematyki ma swe bezpośrednie źródło w rzeczywistości fizycznej, pojawiło się niemal wprost z doświadczenia. Można powiedzieć, że geneza matematyki jest empiryczna. Do XIX wieku wiele teorii matematycznych tworzonych było na zamówienie fizyki. Pewne podstawowe teorie matematyczne powstawały i rozwijały się pod naciskiem zainteresowań i potrzeb nauk przyrodniczych, ale nie wszystkie. Matematyka była jednak – i tym bardziej jest dziś – autonomiczną dziedziną aktywności intelektualnej. Rozwija się ona obecnie przede wszystkim wedle swoich własnych wewnętrznych zasad i reguł (wymienić tu trzeba dążenie do uogólniania, do unifikacji, do prostoty, do swoistego piękna), bez oglądania się na potencjalne zastosowania – choć często tworzone tak teorie okazują się z czasem bardzo przydatnym narzędziem w badaniu świata rzeczywistego. We współczesnej matematyce mamy do czynienia z obiektami wysoce abstrakcyjnymi, całkowicie oderwanymi od zmysłowo poznawalnej rzeczywistości. Wiele dziedzin matematyki nie ma żadnych odniesień i żadnych zastosowań (przynajmniej dotąd) w takiej czy innej praktyce, choć – jak pokazują liczne przykłady z historii nauki – z czasem mogą takie zastosowanie znaleźć. Wystarczy tu wspomnieć choćby geometrie nieeuklidesowe, które zdawały się być igraszką intelektualną, a okazały się bardzo przydatne na przykład w teorii względności (w kinematyce relatywistycznej). Matematyka jest nauką aprioryczną i posługuje się pojęciami apriorycznymi – jak więc się to dzieje, że pojęcia te i badane przez matematykę związki między nimi pozwalają tworzyć (mniej czy bardziej) adekwatne modele rzeczywistości fizycznej, co więcej, modele te umożliwiają nie tylko opisywanie świata, ale pełnią także funkcje predyktywne, pozwalają przewidywać przyszłe stany świata. Współczesna matematyka jest oparta na teorii mnogości – matematycznej teorii zbiorów, w tym zbiorów nieskończonych. Gdzie jednak znaleźć w zmysłowo poznawalnej rzeczywistości zbiory, zwłaszcza zbiory nieskończone? A nieskończoność, w szczególności nieskończoność aktualna, jest przecież niezbędnym, koniecznym elementem świata obiektów matematyki. Współczesne teorie matematyczne to (sformalizowane) teorie aksjomatyczne. Przy tym aksjomatem może być nie tylko, jak dawniej przyjmowano, zdanie prawdziwe (zauważmy, że nie jest jasne, co to miałoby znaczyć), ale każde właściwie zdanie – byle spełniony był warunek niesprzeczności leżącego u podstaw danej teorii układu aksjomatów. Dodajmy jeszcze, że w tworzeniu (nowych) teorii matematycznych często ważną rolę odgrywa pierwiastek estetyczny, co więcej, dążenie do piękna teorii jest jednym z motorów rozwoju matematyki. Jak powiadał angielski matematyk Godfrey Harold Hardy, piękno „jest pierwszym sprawdzianem; nie ma na świecie trwałego miejsca dla brzydkiej matematyki"[2]. Twierdzenia abstrakcyjnych aksjomatycznych teorii matematycznych można na wiele sposobów interpretować – i stanowi to o ich sile i znaczeniu. Jak więc taka teoria może się odnosić do rzeczywistości, jak teorie sformalizowane mogą być praktycznie stosowane?

Pytanie o stosowalność abstrakcyjnych teorii matematycznych do opisu i badania świata związane jest z ogólniejszym pytaniem epistemologicznym, a mianowicie z pytaniem o to, jak i dlaczego myślenie ludzkie, w szczególności myślenie naukowe, pasuje, jest adekwatne w stosunku do konkretnej rzeczywistości. Dlaczego rozumowanie zgodne z zasadami logiki, wychodzące od prawdziwych przesłanek, zawsze prowadzi do prawdziwych wniosków – jest to właściwie pytanie o istotę i status praw i twierdzeń logiki. Mamy tu zresztą do czynienia z jeszcze jednym problemem, a mianowicie z problemem istnienia prawidłowości i regularności w świecie, z problemem istnienia praw przyrody, które umysł ludzki, posługując się w szczególności matematyką i logiką, jest zdolny odkrywać, formułować i wykorzystywać. Możemy więc mówić o pewnej racjonalności świata, a nawet o racjonalności typu matematycznego. Jest to jednak problem wykraczający poza ramy naszych rozważań. Przyjmujemy zatem fakt istnienia takich prawidłowości bez podejmowania próby odpowiedzi na pytanie o racje i przyczyny ich istnienia.

Zauważmy, że na główny problem naszych rozważań można patrzeć z odmiennych perspektyw badawczych: inna będzie perspektywa filozofii matematyki, inna filozofii nauki, w szczególności filozofii fizyki, inna jeszcze filozofii przyrody. Dodajmy też, że skoro matematyka jest

2 Cyt. za A.L. Hammond, *Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura*, w: L.A. Steen, *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, Wydawnictwa Naukowo–Techniczne, Warszawa 1983, s. 26–48; cytat na s. 34. Oryginał angielski: „[Beauty] is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics" (por. A.L. Hammond, *Mathematics – Our Invisible Culture*, w: L.A. Steen (red.), *Mathematics Today. Twelve Informal Essays*, Springer–Verlag, New York–Heidelberg–Berlin 1978, s. 22).

formułowana w języku ludzkim, zatem w kwestie relacji między matematyką a światem uwikłany jest także podmiot ludzki. Należałoby więc uwzględnić także rolę umysłu i wziąć pod uwagę konstatacje filozofii umysłu i kognitywistyki. Dla ustalenia uwagi skupimy się jednak w dalszym ciągu przede wszystkim na perspektywie filozofii matematyki.

Zanim spróbujemy opowiedzieć, jak filozofia matematyki odpowiada na sformułowane wyżej pytania, powinno się dokonać zasadniczego rozróżnienia. Należy mianowicie odróżnić matematyczność i matematyzowalność świata. Przez matematyczność świata rozumiemy tezę głoszącą, że istnieje pewna odpowiedniość między obiektami, na przykład przyrodniczymi i matematycznymi, że kategorie matematyczne odnoszą się do świata, że świat jest ontycznie matematyczny, że matematyka jest „językiem przyrody". Przez matematyzowalność zaś należy rozumieć możliwość skutecznego i efektywnego używania metod matematyki w dziedzinach wiedzy próbujących wyjaśniać świat i jego prawidłowości, czyli fakt podatności świata, w tym przyrody, na opis wykorzystujący język i metody matematyki.

Zauważmy, że teza o matematyczności świata implikuje tezę o jego matematyzowalności. Jeśli świat jest matematyczny, to matematyka jest kluczem do jego poznania i opisania. Dodajmy, że problem – czy świat jest matematyczny, związany jest bezpośrednio z pytaniem o to, czy obiekty matematyki są odkrywane czy też tworzone przez matematyka. Wśród zwolenników tezy o matematyczności świata/przyrody znajdujemy Alfreda North Whiteheada, Wernera Heisenberga, Carla Friedricha von Weizsäckera czy Rogera Penrose'a[3], a na gruncie polskim Józefa Życińskiego i Michała Hellera. Życiński pisał:

> Specyficzny sens matematyczności przyrody przejawia się więc w tym, iż abstrakcyjnym formułom matematyki można przyporządkować modele niezamierzone w dziedzinie konkretnych procesów fizycznych[4].

Heller zaś pisał:

> [W] ogromnej liczbie doświadczalnych sytuacji świat zachowuje się dokładnie tak, jakby rzeczywiście miał czysto matematyczną strukturę.

[3] Penrose twierdzi, że świat jest zbudowany według modelu matematycznego, a my go po kawałku odkrywamy.

[4] J. Życiński, *Jak rozumieć matematyczność przyrody*, w: M. Heller, J. Życiński, A. Michalik (red.), *Matematyczność przyrody*, OBI, Kraków 1992, s. 28.

> Dzięki temu mamy prawo powiedzieć, że modele matematyczne ujawniają strukturę świata[5].

W innym zaś miejscu:

> Matematyczność przyrody polega na tym, że struktura Wszechświata jest przedziwnie podobna do tych struktur, których studiowaniem zajmuje się matematyka[6].

W tym ujęciu matematyczność przysługuje przyrodzie immanentnie – mamy tu zatem do czynienia z tezą ontologiczną. Oznacza ona zarówno strukturalną, jak i funkcjonalną adekwatność przyrody w stosunku do matematyki.

Dodajmy jeszcze, że matematyczność przyrody jest w praktyce hipotezą roboczą, z jaką fizycy przystępują do badania materii.

Jak w historii nauki, dokładniej: w filozofii matematyki wyjaśniano kwestię matematyczności i matematyzowalności świata?

Zacznijmy od Platona (427–347 p.n.e.). Podstawą jego koncepcji jest teoria idei głosząca, że istnieją dwa rodzaje bytu, tworzące dwa odrębne światy – niezmienne idee, które są określonymi przedmiotami istniejącymi poza czasem, przestrzenią i ludzkim poznaniem, oraz zmienne rzeczy, postrzegane za pomocą zmysłów, mniej realne niż idee, będące zaledwie nietrwałymi cieniami idei. Idee istnieją prawdziwie, rzeczy zaś co najwyżej stają się. Rzeczy są odbiciami, cieniami idei, idee zaś są wzorami rzeczy – zatem idee są bytowo uprzednie w stosunku do świata materialnego. Obiekty matematyki należą do świata idei. Twierdzenia matematyki stosują się do świata rzeczy, gdyż te ostatnie są podobne do idei jako swoich wzorców, dokładniej: uczestniczą w odpowiednich ideach. W konsekwencji stosowalność matematyki do opisu świata przestaje być zagadką.

Teoria Platona dała początek koncepcjom zwanym w filozofii matematyki platonizmem matematycznym. Platonizm nie jest jednolity. Cechą wspólną koncepcji określanych tym mianem jest uznawanie istnienia świata bytów matematycznych, niezależnego od świata materialnego i od umysłu ludzkiego. Są one zatem w szczególności niezależne też

5 M. Heller, *Jak istnieje metryka Lorentza?*, w: M. Heller, W. Skoczny, J. Życiński (red.), *Spór o uniwersalia a nauka współczesna*, OBI, Kraków 1992, s. 31.

6 M. Heller, *Co to znaczy, że przyroda jest matematyczna?*, w: M. Heller, J. Życiński, A. Michalik (red.), *Matematyczność przyrody*, OBI, Kraków 1992, s. 10.

od czasu i od przestrzeni. Świat, zwłaszcza przyroda, staje się w platonizmie materialnym modelem teorii matematycznych czy ucieleśnieniem struktur matematycznych. Koncepcja ta ma jednak pewne wady. Otóż nie wyjaśnia ona w pełni związków między idealnymi obiektami matematycznymi a przedmiotami fizycznymi/materialnymi. Dopuszcza też równoległe istnienie do postrzegalnej zmysłowo rzeczywistości idealnego świata obiektów matematyki, które nie oddziałują przyczynowo na ten świat materialny. W konsekwencji nie ma bezpośredniego dostępu poznawczego do świata obiektów matematycznych. Możemy je poznawać albo pośrednio – przez zmysłowe poznawanie rzeczywistości przyrodniczej, albo przy pomocy jakiegoś (niejasnego w istocie) rodzaju intuicji czy bezpośredniego oglądu rozumowego. Sam Platon tłumaczył to swoistą teorią anamnezy. Według niego matematyk nawiązuje do obserwacji i posługuje się myśleniem obrazowym, ale jest to tylko okazja do uświadomienia sobie pojęć, a nie materiał do ich wytworzenia. Matematyk bowiem jedynie przypomina sobie w ten sposób pojęcia, odwołując się do wrodzonej wiedzy o ideach, którą posiada jego umysł. Zdobył ją, oglądając idee w poprzednim życiu i zachowując o nich pamięć. Dlatego w obecnym życiu nie trzeba już zdobywać wiedzy o ideach, wystarczy ją sobie przypomnieć. Wiedza wrodzona jest właśnie „przypomnieniem" – *anamnezis* (por. w związku z tym dialog *Menon*).

Zwolennikami platonizmu było i jest bardzo wielu matematyków[7]. Znajdujemy wśród nich Euklidesa (ok. 365–ok. 300 p.n.e.), neoplatonika Proklosa Diadochusa (410–485), twórcę teorii mnogości Georga Cantora (1845–1918), twórcę logicyzmu Gottloba Frege (1848–1925), Kurta Gödla (1906–1978) czy wreszcie współtwórcę polskiej szkoły logicznej Jana Łukasiewicza (1878–1956). Frege pisał, że:

> Okazało się, że liczba, którą zajmuje się arytmetyka, musi być traktowana nie jako niesamodzielny atrybut, lecz rzeczownikowo (*substantivisch*). [...] Liczba jawi się [...] jako rozpoznawalny przedmiot, chociaż nie fizyczny ani nawet przestrzenny, czyli taki, który moglibyśmy sobie jakoś wyobrazić[8].

---

7 Żartobliwie powiada się, że 99,44% matematyków to platonicy.

8 G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Wilhelm Koebner, Breslau 1884, § 106. Przekład polski (fragmenty): *O pojęciu liczby*, w: R. Murawski, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 2003 (wyd. III), s. 197–226; cytat na s. 224.

Wedle Gödla przyjęcie tezy, że obiekty matematyki istnieją realnie poza czasem i przestrzenią oraz niezależnie od umysłu poznającego (choć nie wyjaśnia on, czym one są i jak istnieją) jest konieczne, by otrzymać zadowalający system matematyki, tak samo jak przyjęcie realnego istnienia obiektów fizycznych jest potrzebne do wyjaśnienia wrażeń zmysłowych. Pisał:

> Klasy i pojęcia mogą być pojmowane jako rzeczywiste obiekty istniejące niezależnie od naszych definicji i konstrukcji. […] Wydaje się, że założenie istnienia takich obiektów jest tak samo uzasadnione, jak przyjęcie istnienia ciał fizycznych, a przecież jest wiele racji, by przyjąć ich istnienie[9].

Przy tym obiekty matematyczne są wedle Gödla czymś różnym od swej reprezentacji w teoriach matematycznych – są w stosunku do nich transcendentne. Podstawowe źródło wiedzy matematycznej stanowi według Gödla intuicja. Dane intuicji muszą być rozwijane poprzez głębsze badanie obiektów. W konsekwencji wiedza matematyczna jest nie tylko wynikiem biernej kontemplacji danych intuicyjnych, ale jest także rezultatem aktywności umysłu. Ta ostatnia ma charakter dynamiczny i kumulatywny.

Jan Łukasiewicz pisał, że gdy zajmuje się nawet najprostszym zagadnieniem logicznym, to ma wrażenie, że znajduje się „wobec jakiejś potężnej, niesłychanie zwartej i niezmiernie odpornej konstrukcji". I dalej:

> Konstrukcja ta działa na mnie jak jakiś konkretny dotykalny przedmiot, zrobiony z najtwardszego materiału, stokroć mocniejszego od betonu i stali. Nic w niej zmienić nie mogę, nic sam dowolnie nie tworzę, lecz w wytężonej pracy odkrywam w niej tylko coraz to nowe szczegóły, zdobywając prawdy niewzruszone i wieczne. Gdzie jest i czym jest ta idealna konstrukcja? Filozof wierzący powiedziałby, że jest w Bogu i jest myślą Jego[10].

---

[9] K. Gödel, *Russell's Mathematical Logic*, w: *The Philosophy of Bertrand Russell*, ed. P.A. Schilpp, The Tudor Publ. Comp., New York 1944, s. 125–153 (cytat na s. 137); także w: P. Benacerraf, H. Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics*: *Selected Readings*, Englewood Cliffs, New Jersey 1964, s. 211–232; wyd. II: Cambridge University Press, Cambridge 1983, s. 447–469.

[10] J. Łukasiewicz, *W obronie logistyki*, w: *Myśl katolicka wobec logiki współczesnej. Studia Gnesnensia* 15, s. 12–26, 159–165; cytat na s. 165. Przedruk w: J. Łukasiewicz, *Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1961, s. 210–219.

Inną odpowiedź na pytanie o status ontologiczny obiektów matematyki i ich związek z rzeczywistością zmysłowo poznawalną znajdujemy u Arystotelesa (384–322 p.n.e.), ucznia Platona. Otóż według niego matematyka nie jest nauką o niezależnych bytach idealnych, w stosunku do których świat rzeczy jest wtórny, ale jest nauką o obiektach wydobywanych z rzeczy w procesie abstrakcji, czyli pewnego rodzaju idealizacji. Jest więc nauką o idealizacjach rozumianych jako wytwory odpowiedniego procesu myślowego. Idee są formami albo istotami rzeczy i tkwią w samych tych rzeczach. Obiekty matematyczne są więc – podobnie jak w platonizmie – rzeczywiste, są myślowymi odbiciami form rzeczy, istnieją obiektywnie, ale nie niezależnie od świata rzeczy. Matematyka jest nauką o własnościach i związkach wzajemnych tych obiektów, które poprzez formy rzeczy stosują się do świata empirycznego. W dziele *Fizyka* Arystoteles pisał:

> Ciała fizyczne zawierają płaszczyzny, odcinki i punkty, które to przedmioty bada matematyk […], ale nie jako ograniczenia tego czy innego ciała fizycznego, lecz rozpatruje je oddzielnie, ponieważ można je w myśli oderwać od ruchu, nie popełniając błędu[11].

W *Metafizyce* znajduje się taka oto wypowiedź:

> Matematyk rozpatruje swoje obiekty ogołociwszy je z takich własności jak lekkość, twardość […] i zatrzymuje się tylko nad tym, co jest wielkością i rozciągłością […], badając raz położenie jednych rzeczy względem drugich i fakty, które stąd wynikają, innym razem ich współmierności i niewspółmierności, jeszcze kiedy indziej ich stosunki[12].

Stanowisko reprezentowane przez Arystotelesa nazywa się w filozofii realizmem umiarkowanym. Koncepcje głoszące taki realizm nie są jednorodne. Mieszczą się więc tu obok koncepcji Arystotelesa także koncepcja św. Tomasza z Akwinu, koncepcje tomistów czy zwolenników materializmu dialektycznego, a także niektórych matematyków[13]. Można tu też umieścić koncepcję Nicolasa D. Goodmana, który głosi,

---

[11] Arystoteles, *Fizyka*, tłum. K. Leśniak, w: *Dzieła wszystkie*, t. 2, PWN, Warszawa 1990, 193 b 22.

[12] Arystoteles, *Metafizyka*, tłum. K. Leśniak, w: *Dzieła wszystkie*, t. 2, PWN, Warszawa 1990, 1061 a 33.

[13] Z matematyków polskich związki między matematyką a światem przyrodniczym podkreślali na przykład Hugo Steinhaus czy Andrzej Mostowski.

że obiekty matematyki to formy matematyczne zjawisk fizycznych[14]. Cechą łączącą te koncepcje jest uznanie obiektów matematyki za abstrakcje z rzeczywistości fizycznej. Przy tym należy podkreślić, że aby wyjaśnić całą złożoność współczesnej matematyki, dopuszcza się tu abstrakcje wielostopniowe, czyli abstrakcje z abstrakcji itd. Różnie też rozumie się sam proces abstrakcji. W szczególności Arystoteles i tomiści mówią o abstrakcji pomijającej zmienność, Jean Piaget o abstrakcji odzwierciedlającej, czyli abstrakcji z czynności podmiotu, materializm dialektyczny o abstrakcji uogólniającej, abstrakcji potencjalnego urzeczywistnienia i abstrakcji nieskończoności aktualnej[15].

Cechą pozytywną umiarkowanego realizmu jest fakt, że nie wikła się on w trudności ontologiczne platonizmu. Wadą jest w szczególności to, że istnienie obiektów matematycznych jest tu uzależnione nie tylko od przedmiotów świata materialnego, ale również od istnienia abstrahującego podmiotu – musi bowiem istnieć nie tylko świat materialny, ale także ktoś lub coś dokonujące aktu abstrakcji. Dalej, niektóre pojęcia matematyczne są nie tyle abstrakcjami z obiektów fizycznych, ile idealizacjami tychże. Co więcej, w matematyce funkcjonuje wiele obiektów niemających związku z przedmiotami świata materialnego, ale powstałych poprzez abstrakcję z abstraktów.

Pewnego podobieństwa do koncepcji Arystotelesa dopatrzeć się można u empirystów. Głoszą oni, że poznanie matematyczne pochodzi całkowicie z doświadczenia. Zaliczyć tu można Johna Locke'a (1632–1704), Davida Hume'a (1711–1776) czy Johna Stuarta Milla (1806–1873). Ten ostatni głosił na przykład, że pojęcia matematyczne są wyabstrahowane z obiektów otaczającej nas rzeczywistości poznawalnej zmysłowo poprzez pominięcie pewnych cech realnych przedmiotów przy jednoczesnym uogólnieniu i wyidealizowaniu innych. W dziele *System of Logic* (1843, s. 350) pisał:

---

14 Por. N. Goodman, *Mathematics as Natural Science*, „Journal of Symbolic Logic" 1990, nr 55, s. 182–193.

15 Por. J. Piaget, *Psychologia i epistemologia*, tłum. Z. Zakrzewska, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1977, oraz A. Lemańska, *Przedmiot matematyki w materializmie dialektycznym*, w: M. Lubański i Sz. Ślaga (red.), *Z zagadnień filozofii przyrodoznawstwa i filozofii przyrody*, t. 7, Akademia Teologii Katolickiej, Warszawa 1985, s. 23–53.

> Punkty, linie, koła i kwadraty, jakie ktoś ma w swoim umyśle, są w moim rozumieniu po prostu kopiami punktów, linii, kół i kwadratów, z jakimi się on poznał w swoim doświadczeniu[16].

W tym ujęciu stosowalność matematyki do opisu świata pozostaje nierozwiązalną zagadką.

Obiektów matematyki szuka też podobnie jak Arystoteles w rzeczach żyjący w XV wieku teolog i matematyk, jeden z ostatnich scholastyków, Mikołaj z Kuzy (1401–1464), przy tym uzasadnia on swe stanowisko teologicznie. Bóg stworzył świat wedle zasad i praw matematyki i umieścił w rzeczach tego świata idee matematyczne, takie jak liczby czy figury geometryczne. Człowiek próbuje pojąć i zrozumieć to Boże dzieło, stworzone i panujące w nim zależności, symulując i rekonstruując je w matematyce.

Podobnie sądził Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), powiadając „Dum Deus calculat et cogitationem exercit, fit mundus"[17] (Gdy Bóg liczy i zamyśla, świat się staje). Zdanie to stanowi jądro racjonalizmu Leibniza grającego wedle niego istotną rolę w matematyce. Matematyka jest zatem boskim źródłem Bożego stworzenia. Stosowalność matematyki do opisu i wyjaśniania świata nie stanowi więc już problemu, więcej, staje się warunkiem takiego opisu (w wymiarze kosmologicznym). Matematyka staje się odkrywaniem i rekonstruowaniem boskiego *ratio* w stworzeniu.

Podobnie zdają się sądzić Życiński i Heller. Skoro obiekty i struktury matematyczne są czymś abstrakcyjnym i idealnym, to chcąc wyjaśnić matematyczność świata, musimy przyjąć założenie istnienia Boga jako Wielkiego Matematyka, który nadał rzeczywistości kształt matematyczny. Heller powie nawet, że „Bóg to Matematyka". Przy tym nigdy nie poznamy świata do końca, bo nasza matematyka jest zbyt prosta w stosunku do tej, którą posługuje się Bóg i która jest „zakodowana" w świecie.

---

[16] J.S. Mill, *System of Logic Ratiocinative and Inductive, Being a connected View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigation*, 1843; przekład polski: *System logiki dedukcyjnej i indukcyjnej*, tłum. C. Znamierowski, PWN, Warszawa 1962; fragmenty także w: R. Murawski, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 2003 (wyd. III), s. 147–150; cytat na s. 148.

[17] Por. jego esej *Dialogus*, August 1677, s. 191.

Jeszcze inne wyjaśnienie fenomenu adekwatności matematyki w stosunku do świata daje wielki filozof królewiecki Immanuel Kant (1724–1804). Wedle niego twierdzenia matematyki czystej są sądami syntetycznymi (czyli rozszerzającymi naszą wiedzę) *a priori* (czyli są niezależne od doświadczenia zmysłowego). Nie mogą one być zdaniami empirycznymi, czyli *a posteriori*, gdyż są powszechne i konieczne. Muszą zaś być syntetyczne, gdyż dotyczą jednostkowych wyobrażeń, jakimi są przestrzeń i czas. Pojawia się jednak problem: jak w ogóle są możliwe zdania syntetyczne *a priori*? Kant udzielił odpowiedzi na to zasadnicze pytanie w *Krytyce czystego rozumu* i w *Prolegomenach do wszelkiej przyszłej metafizyki, która będzie mogła wystąpić jako nauka*.

Wedle niego przestrzeń i czas nie są realnymi przedmiotami istniejącymi poza nami, czyli poza poznającymi podmiotami, lecz są stałymi formami naszej zmysłowości, naszego oglądu, tzn. są dodawane przez nasze zmysły do odbieranych przez nas wrażeń. W konsekwencji nie docieramy w naszym poznaniu do rzeczy samych w sobie (*Ding an sich*), nie poznajemy ich takimi, jakie są same w sobie, bo ujmujemy je w pewnych, właściwych naszej zmysłowości formach, tzn. w formach czasu i przestrzeni, które są formami porządkującymi nasze wrażenia zmysłowe.

Matematyka bada właśnie czas (arytmetyka) i przestrzeń (geometria) jako aprioryczne formy naoczności. Zajmuje się więc sferą czystego oglądu. Pozwala ujmować i organizować oraz strukturyzować strumień wrażeń płynący od świata. W *Prolegomenach* Kant pisał:

> Otóż przestrzeń i czas są tymi danymi naocznymi (*Anschauungen*), które czysta matematyka kładzie u podstaw wszystkich swych poznań i sądów, występujących zarazem jako apodyktyczne i konieczne. […] Geometria kładzie u [swych] podstaw czystą naoczność przestrzeni. Arytmetyka nawet swoje pojęcia liczb wytwarza przez kolejne dołączanie jednostek w czasie; zwłaszcza jednak czysta mechanika może wytworzyć swe pojęcia ruchu tylko za pomocą wyobrażenia czasu[18].

Kant nie twierdzi, że dla pełnego opisu struktury przestrzeni i czasu wystarczy bierna kontemplacja. Przeciwnie – zakłada aktywność umysłu.

---

[18] I. Kant, *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können*, 1783; przekład polski: *Prolegomena do wszelkiej przyszłej metafizyki, która będzie mogła wystąpić jako nauka*, tłum. B. Bornstein, oprac. J. Suchorzewska, PWN, Warszawa 1960 (wyd. I), 1993 (wyd. II); cytat na s. 47.

Umysł konstruuje pojęcia matematyczne w tym sensie, że wychodząc poza werbalne definicje tych pojęć, dostarcza stosownych przedmiotów *a priori*. Trzeba też podkreślić, że Kant wyraźnie odróżnia konstrukcję obiektu i postulowanie jego istnienia. Nie można więc na przykład skonstruować sfery pięciowymiarowej, ale można postulować jej istnienie. Właśnie to rozróżnienie postulowania istnienia obiektu matematycznego, co wymaga tylko wewnętrznej niesprzeczności, i jego konstrukcji, która wymaga, by przestrzeń percepcyjna miała pewną określoną strukturę, jest bardzo ważne dla zrozumienia filozofii Kanta.

Wedle Kanta twierdzenia matematyki czystej są – jak powiedzieliśmy wyżej – zdaniami syntetycznymi *a priori*. Są zatem konieczne. Zdania matematyki stosowanej natomiast są albo zdaniami syntetycznymi *a posteriori* (gdy dotyczą treści empirycznej doznań zmysłowych), albo zdaniami syntetycznymi *a priori* (gdy mówią o przestrzeni i czasie). Matematyka czysta mówi o przestrzeni i czasie niezależnie od materiału empirycznego, zaś matematyka stosowana odnosi się do struktury przestrzeni i czasu wraz z wypełniającym je materiałem.

Dlaczego jednak twierdzenia matematyki nadają się do opisu rzeczywistości poznawalnej zmysłowo? Kant odpowiada na to pytanie, pisząc w *Prolegomenach* tak:

> Jeżeli jednak obraz ten, lub raczej ta naoczność formalna [tzn. czas i przestrzeń – uwaga moja, R.M.] jest istotną własnością naszej zmysłowości, za pomocą której jedynie bywają nam dane przedmioty, ta zaś zmysłowość przedstawia nie rzeczy same w sobie, lecz tylko ich zjawiska, to już bardzo łatwo daje się pojąć i jest zarazem nieodparcie dowiedzione, że wszystkie zewnętrzne przedmioty naszego świata zmysłowego muszą koniecznie z zupełną dokładnością zgadzać się z twierdzeniami geometrii; zmysłowość bowiem dzięki swej formie naoczności zewnętrznej (przestrzeni), którą zajmuje się geometria, sprawia dopiero, że owe przedmioty jako same tylko zjawiska stają się możliwe. […] ponieważ przestrzeń, jak ją sobie myśli geometra, jest całkiem dokładnie formą zmysłowej naoczności, którą znajdujemy w nas samych *a priori* i która zawiera w sobie podstawę możliwości wszystkich zjawisk zewnętrznych (co do ich formy), przeto zjawiska muszą koniecznie i jak najściślej zgadzać się z twierdzeniami geometry, które on wyprowadza nie z jakiegoś zmyślonego pojęcia, lecz z podmiotowej podstawy wszystkich zjawisk zewnętrznych, mianowicie z samej zmysłowości[19].

[19] Dz. cyt., s. 55–56.

Kant powiada nawet, że:

> Tyle jest w każdym poznaniu prawdziwej nauki, ile jest w nim matematyki[20].

Jeszcze inną odpowiedź daje Willard Van Orman Quine (1908–2000). Według niego matematykę należy rozważać nie w oderwaniu od innych nauk, ale jako element ogółu teorii wyjaśniających rzeczywistość[21]. Takie holistyczne spojrzenie na naukę doprowadziło go do sformułowania tzw. argumentu z niezbędności (*indispensability argument*), będącego we współczesnych dyskusjach na temat ontologii matematyki jednym z najważniejszych argumentów na rzecz realizmu. Argument ten głosi, że jeśli jesteśmy realistami w stosunku do teorii fizycznych posługujących się matematyką jako narzędziem, to konsekwentnie powinniśmy przyjąć też stanowisko realistyczne w odniesieniu do obiektów matematycznych, o których mowa w teorii. Skoro matematyka jest niezbędna na przykład w teoriach fizycznych, to istnieją jej obiekty, podobnie jak istnieją na przykład elektrony (jako jedne z obiektów fizyki niezbędnych do jej uprawiania). Quine przyjmuje bowiem tylko jeden sposób istnienia. Nie mamy więc u niego do czynienia z istnieniem: fizycznym, matematycznym, intencjonalnym, konceptualnym itp., tylko po prostu z istnieniem. Odrzuca też możliwość podziału teorii naukowych na część analityczną (czysto konwencjonalną) i syntetyczną (dotyczącą rzeczywistości). Zauważmy, że oparcie się na argumencie z niezbędności pozwala na naturalne wyjaśnienie faktu stosowalności matematyki do opisu i rozumienia świata rzeczywistego. Matematyka jako narzędzie wchodzi bowiem po prostu w skład konstruowanych teorii o świecie.

Dodajmy, że stanowisko podobne do stanowiska Quine'a reprezentuje również Hilary Putnam (1926–2016). Stąd też argument z niezbędności nazywa się często w literaturze argumentem Quine'a–Putnama.

Pewną nową odpowiedź proponuje modna ostatnio w filozofii matematyki koncepcja strukturalistyczna, wedle której matematyka bada struktury, a nie obiekty. Nie pytamy zatem na przykład, czym są liczby

---

[20] Cyt. za I. Kant, *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*, s. 13. Tekst oryginalny: „[…] in jeder besonderen Naturlehre nur so viel *eigentliche* Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin *Mathematik* anzutreffen ist".

[21] Na temat koncepcji Quine'a por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 2017 (wyd. VI), s. 111–112.

naturalne, nie ma to bowiem żadnego znaczenia. Istotne są tylko związki między czymś, co nazywamy liczbami. W istocie matematycy nie badają własności liczb czy innych obiektów jako takich, a jedynie związki i relacje między nimi. Interesują ich własności strukturalne, a nie własności samych pojedynczych wyrwanych z kontekstu obiektów. Może to dlatego jej twierdzenia dają się stosować w konkretnych rzeczywistych sytuacjach, mimo że dotyczą obiektów abstrakcyjnych, jakimi są struktury.

Popularne jest w ostatnich czasach w filozofii matematyki podejście uwzględniające rzeczywistą praktykę badawczą matematyków. Wśród tego typu koncepcji znajdujemy w szczególności koncepcję Raymonda Louisa Wildera, patrzącego na matematykę jako na system kulturowy[22]. Próbuje się tam odpowiadać na rozważane przez nas pytanie dotyczące stosowalności matematyki do opisu świata w następujący sposób: otóż, jeśli matematyka tak jak fizyka, chemia czy inne tym podobne dyscypliny są systemami kulturowymi i problemy, nad którymi pracują matematycy, fizycy czy chemicy, są im sugerowane w pewien sposób przez siły kulturowe działające w ramach odpowiednich subkultur oraz jeśli dodatkowo kontakty między matematykami, fizykami i chemikami są wystarczająco silne, to należy się spodziewać, że matematyka będzie się nadawała do stosowania w naukach przyrodniczych. W ten sposób otrzymujemy socjologiczno-kulturowe wyjaśnienie „efektywności matematyki" (wyjaśnienie, które, dodajmy, nie jest chyba niestety w pełni zadowalające, bo zatrzymuje się na poziomie zjawiskowym i socjologicznym tylko, a nie podaje głębszych racji ontologiczno-epistemologicznych).

Nie wspomnieliśmy do tej pory kilku ważnych koncepcji i stanowisk filozofii matematyki, takich jak nominalizm i konceptualizm czy klasyczne kierunki współczesnej filozofii matematyki, tzn. logicyzm, intuicjonizm i formalizm. Nie wnoszą one jednak nic nowego do rozważanego przez nas problemu. Według nominalizmu pojęcia matematyki są jedynie czystymi nazwami, a matematyka staje się dziedziną, w której bada się związki między tak rozumianymi pojęciami, staje się ona nauką formalną, grą na symbolach bez żadnego związku z rzeczywistością materialną. Próbuje się nawet (na przykład Field 1980) pokazywać, że matematyka, w szczególności aparat matematyczny, jest w istocie zbędny na przykład w fizyce – fizykę można uprawiać bez matematyki, matematyka nie wnosi niczego do naszego pojmowania i rozumienia

---

22 Por. R.L. Wilder, *Mathematics as a Cultural System*, Pergamon Press, Oxford 1981.

świata, niczego, co byłoby empirycznie ważne[23]. Ten rodzaj nominalizmu nazywa się w filozofii matematyki fikcjonalizmem – głosi on, że obiekty matematyki to jedynie użyteczne fikcje. Próbuje się uzasadniać tę tezę poprzez pokazywanie rekonstrukcji teorii fizycznych, w których to rekonstrukcjach wyeliminowano aparat matematyczny. Nie jest to oczywiście pełne uzasadnienie – wspomniane rekonstrukcje dotyczą jedynie pojedynczych teorii – u Hartry'ego Fielda jest to Newtonowska teoria grawitacji. Co więcej, rozważana teza załamuje się, gdy przejdzie się na przykład do mechaniki kwantowej, w której – jak powiada Werner Heisenberg – „Dopiero teoria rozstrzyga, co można zaobserwować"[24]. Przy okazji widzimy tu, że pojęcie rzeczywistości zewnętrznej czy pojęcie świata, w badaniu których stosujemy matematykę, jest dziś inne, niż było dawniej. Dziś można powiedzieć, że mikroświat i makroświat „rozpuściły" się niejako w matematyce. Tak jest na przykład w mechanice kwantowej czy w kosmologii – tutaj granice między matematyką a rzeczywistością fizyczną niejako się zacierają.

Konceptualizm z kolei (głoszony m.in. przez intuicjonizm) twierdzi, że pojęcia matematyki to swobodny twór umysłu ludzkiego, który nie musi brać pod uwagę rzeczywistości zewnętrznej czy który – jak w intuicjonizmie – opiera się na pierwotnej intuicji liczby naturalnej, a związek tej z kolei ze światem zewnętrznym jest niejasny. Kwestia zatem stosowalności i adekwatności matematyki w stosunku do świata rzeczywistego pozostaje zupełnie niewyjaśniona. Logicyzm i formalizm w ogóle nie zajmowały się tą kwestią, gdyż ich celem było zbudowanie solidnych podstaw dla matematyki (zbudowanej na gruncie teorii mnogości) jako takiej poprzez zredukowanie jej do czegoś prostszego i pewniejszego, na przykład do logiki (w logicyzmie) czy do matematyki finitystycznej, opartej na jasnym i bezpośrednim oglądzie w stylu Kantowskim (w formalizmie).

Z przedstawionych wyżej rozważań wynika, że odpowiedź na pytanie o to, dlaczego matematyka pozwala rozumieć i opisywać świat, winna w istocie brzmieć: NIE WIEMY. Niektórzy mówią tu więc o „niepojętej skuteczności matematyki w naukach przyrodniczych" (*the unreasonable*

---

[23] Por. H. Field, *Science Without Numbers: The Defence of Nominalism*, Princeton University Press, Princeton 1980; wyd. II rozszerz.: Oxford University Press, Oxford 2016.

[24] W. Heisenberg, *Der Teil und das Ganze – Gespräche im Umkreis der Atomphysik*, R. Piper & Co. Verlag, München 1969, s. 92.

effectiveness of mathematuics in the natural science) – tak twierdzi w szczególności Eugen P. Wigner (1902–1995), często cytowany fizyk i laureat Nagrody Nobla (1963) w dziedzinie fizyki za wkład do teorii jądra atomowego i cząstek elementarnych oraz za odkrycie podstawowych zasad symetrii unitarnej. Pisze on, że „niezwykła użyteczność matematyki w naukach przyrodniczych jest czymś graniczącym z tajemnicą, […] nie ma żadnego racjonalnego wyjaśnienia tego faktu”[25]. Dostrzegając – jak to określa – dwa cuda praw fizyki, tzn. istnienie praw przyrody i zdolność umysłu ludzkiego do odgadywania ich – dochodzi do następującego wniosku:

> Cud odpowiedniości języka matematyki do wyrażania praw fizyki jest niezwykłym darem, którego nie rozumiemy i na który nie zasługujemy. Powinniśmy być za niego wdzięczni i mieć nadzieję, że pozostanie on w mocy [także] w przyszłych badaniach i rozszerzy się – na lepsze lub gorsze, dla naszej przyjemności, a być może też ku naszej konfuzji – na inne gałęzie wiedzy[26].

Wedle Eugena P. Wignera matematyce nie przysługuje żadna treść, matematyka jest jedynie „zabawą formalną”. Matematyk nie posiada w istocie żadnej wiedzy, a jedynie pewne szczególne umiejętności zręcznego operowania pojęciami.

Zauważmy, że choć Wigner mówi w swoim artykule o skuteczności matematyki w naukach przyrodniczych, to w istocie chodzi mu głównie o nauki takie, jak: fizyka, chemia czy astronomia. Okazuje się bowiem, że matematyka jest mniej skuteczna, czy wręcz nieskuteczna, na przykład w biologii, naukach społecznych czy humanistycznych. Z czego to wynika? Być może ze złożoności struktury układów badanych przez te nauki. A może nie stworzono jeszcze odpowiednich teorii matematycznych?

Nie wiemy zatem, na czym polega i jakie ma źródło stosowalność matematyki do świata rzeczywistego. Potwierdza się więc teza Leszka Kołakowskiego, który powiedział kiedyś, że filozofowie potrafią pytać, a nie dawać przekonujące odpowiedzi. Poprzestańmy zatem na pięknym *adagium* pochodzącym od polskiego matematyka Hugona Steinhausa (1887–1972), który zresztą bardzo cenił matematykę stosowaną i z powo-

---

[25] Dz. cyt.

[26] Dz. cyt.

dzeniem zajmował się zastosowaniami matematyki. Wypowiedział on zdanie (wyryte zresztą na jego nagrobku):

> Między duchem a materią pośredniczy matematyka.

Amerykański architekt Claude Fayette Bragdon (1866–1946) powiedział zaś:

> Matematyka to pismo wyryte w ludzkiej świadomości przez samego Ducha Życia[27].

Czy to, że nie mamy rozstrzygających odpowiedzi na nasze pytania, powinno nas martwić? Pewnie tak. I powinno stymulować do dalszych poszukiwań. Pamiętajmy jednak, że postęp w filozofii polega nie tylko na udzielaniu odpowiedzi na pytania filozoficzne, lecz także na doskonaleniu aparatury pojęciowej, w której wyraża się tezy filozoficzne, i na eliminacji błędnych rozwiązań. Albert Einstein powiedział zaś kiedyś:

> Najpiękniejszą i najgłębszą rzeczą, jaką człowiek może przeżyć, jest uczucie tajemniczości/tajemniczego[28].

---

[27] „Mathematics is the handwriting on the human consciousness of the very Spirit of Life itself" – C.F. Bragdon, *Architecture and Democracy*, s. 61.

[28] „Das Schönste und Tiefste, das der Mensch erleben kann, ist das Gefühl des Geheimnisvollen" – A. Einstein, *Mein Glaubensbekenntnis* (1932), http:// www.einsteinwebsite.de/z_biography/glaubensbekenntnis.html.