

# CZY FIZYK UDOWODNI HIPOTEZĘ RIEMANNA?

MAREK WOLF

Wydział Matematyczno-Przyrodniczy. Szkoła Nauk Ścisłych  
Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

*Między duchem a materią pośredniczy matematyka.*  
Hugo Dyonizy Steinhaus (1887–1972)

Bernard G.F. Riemann żył niecałe 40 lat (1826–1866). Jednak w ciągu krótkiego życia dokonał tak wielu odkryć, że jest uważany za jednego z największych matematyków. Jego nazwisko występuje w wielu różnych dziedzinach matematyki, wspomnimy tutaj geometrię Riemanna, równania Cauchy’ego – Riemanna i powierzchnie Riemanna w teorii funkcji zmiennej zespolonej, całkę Riemanna i twierdzenie o szeregach warunkowo zbieżnych w analizie matematycznej, tensor Riemanna w geometrii różniczkowej. Jednak najbardziej jest znany ze sformułowania w swojej jedynej pracy z teorii liczb przypuszczenia obecnie nazywanego Hipotezą Riemanna (w dalszej części będziemy używać skrótów HR). Duże znaczenie HR wynika stąd, że zapewne kilka tysięcy twierdzeń zaczyna się od słów: „Załóżmy prawdziwość Hipotezy Riemanna, wtedy ...”

W roku 1900 podczas Kongresu Matematycznego w Paryżu D. Hilbert ogłosił listę 23 problemów do rozwiązania przez matematyków w XX wieku. Problem VIII składał się z dwóch części: Hipotezy Goldbacha i Hipotezy Riemanna. W roku 2000 HR pojawiła się na liście 7 problemów Clay Mathematics Institute na trzecie tysiąclecie, tym razem z obiecaną nagrodą miliona dolarów amerykańskich za jej rozstrzygnięcie.

Od czasów Euklidesa (około 330 p.n.e.) wiadomo, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych  $2, 3, 5, 7, 11, \dots, p_n, \dots$ . Dowód zamieszczony w *Elementach* był nie wprost. Pierwszy dowód wprost podał L. Euler około roku 1740, wykazując, że suma harmoniczna po liczbach pierwszych  $p_n$  jest rozbieżna:

$$\sum_{p_n < x} \frac{1}{p_n} \sim \log \log(x).$$

Naturalne jest pytanie o to, ile jest liczb pierwszych wśród liczb naturalnych mniejszych niż  $x$ . Tradycyjnie funkcję odpowiadającą na to pytanie oznacza się przez  $\pi(x)$ , tzn.  $\pi(x) = \#\{p \text{ liczba pierwsza i } p < x\}$ . Okazuje się, że tak nieregularna funkcja może być przybliżona przez proste wyrażenie analityczne: Carl Friedrich Gauss jako nastolatek odkrył, że trend wzrostu  $\pi(x)$  opisany jest przez logarytm całkowity  $\text{Li}(x)$ :

$$\pi(x) \sim \text{Li}(x) := \int_2^x \frac{du}{\log(u)}. \quad (1)$$

Symbol  $f(x) \sim g(x)$  oznacza tutaj  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1$ .

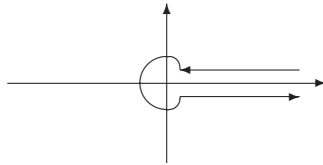
Drogę prowadzącą do dowodu (1) wskazał Bernard Riemann w pracy [1]. Punktem wyjścia był wzór otrzymany przez Eulera:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad s = \sigma + it, \quad \Re[s] = \sigma > 1. \quad (2)$$

Po prawej stronie (2) iloczyn przebiega po wszystkich liczbach pierwszych  $p = 2, 3, 5, \dots$ . Osobliwość w iloczynie dla  $p = 1$  jest jednym z powodów, dla których pierwszą liczbą pierwszą jest 2, a nie 1, która — zgodnie z aktualną konwencją — nie jest ani liczbą pierwszą, ani złożoną. W rzeczywistości Euler rozważał powyższy wzór dla naturalnych argumentów  $k \geq 2$  (dla  $k = 1$  mamy rozbieżny szereg harmoniczny):  $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ , a Riemann rozszerzył dziedzinę tej funkcji na całą płaszczyznę zespoloną  $s = \sigma + it$  bez  $s = 1$  ( $t^2 = -1$ , w dalszej części gwiazdka będzie oznaczać sprzężenie zespolone  $(a + ib)^* = a - ib$ ,  $a, b$  są rzeczywiste). Dla  $s$  na lewo od linii  $\Re[s] = 1$  Riemann określił dzetę przez przedłużenie analityczne

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(-s)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s dx}{e^x - 1} \frac{1}{x}, \quad (3)$$

gdzie  $\int_{+\infty}^{+\infty}$  oznacza całkę po poniższej konturze



Występująca w (3) funkcja gamma  $\Gamma(z)$  ma wiele reprezentacji, np. w postaci iloczynu Weierstrassa:

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} e^{z/k}. \quad (4)$$

Z tej definicji widać, że  $\Gamma(z)$  jest zdefiniowana dla wszystkich liczb zespolonych  $z$  z pominięciem  $z = 0, -1, -2, \dots, -n, \dots$ , gdzie  $\Gamma$  ma bieguny proste. Najpopularniejsza definicja funkcji gamma za pomocą całki  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$  jest słuszna tylko dla  $\Re[z] > 0$ . Obecnie znanych jest kilkadziesiąt innych przedstawień funkcji  $\zeta(s)$ , praca [2] zawiera przegląd reprezentacji całkowych dla  $\zeta(s)$ . Riemann wykazał dalej, że  $\zeta(s)$  spełnia równanie funkcyjne:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s), \quad \text{dla } s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}. \quad (5)$$

Powyższa postać równania funkcyjnego jest jawnie symetryczna względem linii prostej  $\Re(s) = 1/2$ : zamiana  $s \rightarrow \frac{1}{2} + s$  po obu stronach (5) pokazuje, że kombinacja funkcji  $\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$  przyjmuje tę samą wartość w punktach  $\frac{1}{2} + s$  oraz  $\frac{1}{2} - s$ .

W pracy [1] Riemann w heurystyczny sposób wyprowadził *dokładny* wzór na  $\pi(x)$ :

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\mu(n)}{n} \left( \text{Li}(x^{1/n}) - \sum_{\rho} \text{Li}(x^{\rho/n}) \right). \quad (6)$$

We wzorze powyżej  $N$  jest taką liczbą naturalną, że  $x^{1/N} > 2 > x^{1/(N+1)}$ , a  $\mu(n)$  oznacza funkcję Möbiusa:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 1 \\ 0 & \text{gdy } n \text{ jest podzielne przez kwadrat liczby} \\ & \text{pierwszej } p: p^2 | n \\ (-1)^r & \text{gdy } n = p_1 p_2 \dots p_r \end{cases} \quad (7)$$

Sumowanie w (6) po  $\rho$  oznacza sumowanie po rozwiązaniach równania  $\zeta(\rho) = 0$ , czyli po zerach dzety. Riemann udowodnił, że  $\zeta(s)$  ma trywialne zera  $\zeta(-2n) = 0$  i można wykazać, że ich wkład do (6) jest zaniedbywalny. Z kolei nietrywialne zera  $\rho_n$  mogą istnieć tylko wewnątrz pasa krytycznego  $0 \leq \Re(s) \leq 1$ , gdyż dla  $\Re(s) > 1$  żaden czynnik iloczynu po  $p$  w (2) nie znika. Riemann założył, że te wszystkie nietrywialne zera  $\rho_n$  (był przekonany, że jest ich nieskończenie wiele, por. poniżej wzór (9) na liczbę zer  $N(T)$ ) leżą na prostej krytycznej dokładnie pośrodku pasa krytycznego, tzn. mają część rzeczywistą równą  $\frac{1}{2}$ :

$$\text{Hipoteza Riemanna: } \rho_n = \frac{1}{2} + i\gamma_n. \quad (8)$$

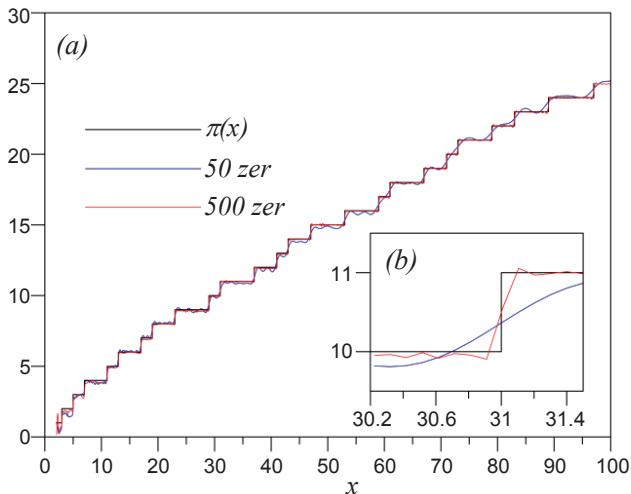
Z symetrii równania funkcyjnego (5) względem linii prostej  $\Re(s) = 1/2$  oraz symetrii względem sprzężenia zespolonego  $\zeta(s^*) = (\zeta(s))^*$  wynika, że jeżeli  $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$  jest zerem, to  $\rho_n^* = \beta_n - i\gamma_n$  i  $1 - \rho_n$ ,  $1 - \rho_n^*$  są także zerami.

Równość (6) jest niezwykła: pomiędzy liczbami pierwszymi wykresem  $\pi(x)$  jest poziomy odcinek, więc suma po wszystkich zerach musi dać w sumie z rosnącym trendem  $\sum_{n=1}^N \frac{\mu(n)}{n} \text{Li}(x^{1/n})$  funkcję odcinkami stałą, która będzie skakać o jeden przy przejściu argumentu  $x$  przez kolejne liczby pierwsze, ilustruje to wykres na rys. 1. Ścisłe rzecz biorąc, szereg w (6) daje  $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \{\pi(x - \epsilon) + \pi(x + \epsilon)\}$ , więc dla  $x$  będącego liczbą pierwszą wartość otrzymana z szeregu po prawej stronie (6) leży w połowie pionowego stopnia między poziomymi odcinkami o rzędnych będących kolejnymi liczbami naturalnymi, zob. rys. 1(b). Wzór (6) nie został dotychczas udowodniony, zresztą szereg w (6) nie może być absolutnie zbieżny, gdyż wtedy nieskończona suma ciągłych składników byłaby funkcją ciągłą.

W roku 1896 J.S. Hadamard (1865 – 1963) and Ch.J. de la Vallée Poussin (1866–1962) niezależnie wykazali, że  $\zeta(s)$  nie ma zer na linii  $1 + it$ , czyli  $|x^{\rho}| < x$ . Zatem z (6) wynika, że suma po zerach nietrywialnych będzie zawierać składnik  $x$  w potęgę mniejszej niż 1, więc dominujący wkład będzie pochodzić z pierwszego wyrazu w (6)  $\mu(1)\text{Li}(x) \approx \frac{x}{\log(x)}$ .

Na początku lat trzydziestych ubiegłego wieku Carl L. Siegel uzyskał dostęp do zachowanej spuścizny („Nachlass”) po Riemannie przechowywanej w bibliotece Uniwersytetu w Getyndze i przez blisko dwa lata pracowicie i z uporem studiował, zapisane trudnym czytelnym charakterem pisma, jego notatki. Okazało się, że Riemann znalazł przybliżone warto-

ści kilku najniższych nietrywialnych zer dzety i stwierdził, że wszystkie one mają część rzeczywistą równą  $\frac{1}{2}$ . W tabeli 1 prezentujemy przybliżone wartości 10 pierwszych miejsc zerowych dzety w pasie krytycznym. W roku 1903 J.P. Gram [3] wyliczył pierwszych 15 zer  $\zeta(s)$ ; w czerwcu 1950 roku Allan Turing wykorzystał komputer Mark 1 na Uniwersytecie w Manchester do wyliczenia 1104 zer. Ciekawostką jest to, że Turing nie wierzył w prawdziwość HR i przeprowadził obliczenia „... w nadziei, że będzie można znaleźć zera poza linią krytyczną”, zob. [4, str. 99]. Dziesięć lat temu S. Wedeniwski (2005) kierował internetowym projektem zetagrid [5], w ramach którego w ciągu czterech lat stwierdzono, że  $10^{11}$  zer jest na linii krytycznej, tzn. na linii  $\frac{1}{2} + it$  aż do  $t < 29,538,618,432.236$ .

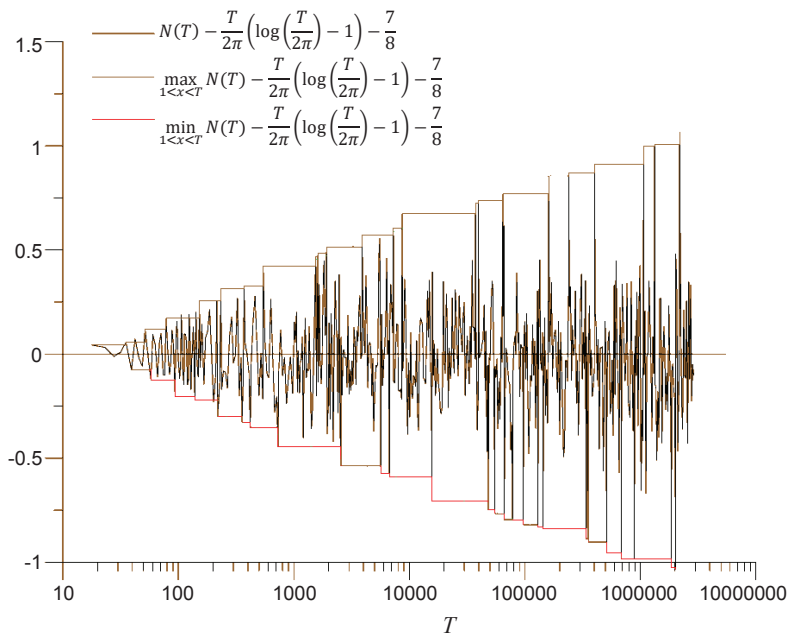


1. Porównanie wykresu  $\pi(x)$  i prawej strony (6) z sumą po 50 i 500 nietrywialnych zerach  $\zeta(s)$ . Dla  $x$  będących liczbami pierwszymi wyraźnie widać, że niebieska linia przecina pionowe stopnie „schodów” wykresu  $\pi(x)$  w przybliżeniu w ich połowie. Na rys. (b) pokazany jest ten efekt w powiększeniu wokół  $x = 31$ . Jest to zjawisko analogiczne do występującego w twierdzeniu Dirichleta o zbieżności szeregów Fouriera.

Niech  $N(t)$  oznacza funkcję zliczającą nietrywialne zera do  $T$ , tzn.  $N(T) = \sum_n \Theta(T - \Im[\rho_n])$ . W swojej pracy z 1859 roku Riemann podał wzór:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi e}\right) + \frac{7}{8} + O(\log(T)), \quad (9)$$

który został udowodniony w 1905 roku przez von Mangoldt. Na rys. 2 pokazany jest wykres różnicy  $N(T) - \frac{T}{2\pi} \left( \log \left( \frac{T}{2\pi} \right) - 1 \right) - \frac{7}{8}$  do  $T = 5 \times 10^6$ .



2. Wykres ilustrujący wzór (9) do  $T = 5 \times 10^6$ . Gdyby pionowy odcinek  $(0, 1)$  miał długość 4 cm, to pozioma oś, narysowana w skali liniowej zamiast w logarytmicznej, miałaby długość 200 km.

Jak rozstrzygnąć (tzn. udowodnić albo obalić) HR? Praktycznie nikt nie stara się zrobić tego wprost. Znanych jest ponad 100 kryteriów albo równoważnych HR, albo takich stwierdzeń, z których prawdziwości wynika prawdziwość HR. W roku 2017 ukazała się dwutomowa monografia *Equivalents of the Riemann Hypothesis* [6] napisana przez K. Broughana.

Przez wiele lat wiązano nadzieję na udowodnienie HR z przypuszczeniem Mertensa. Funkcja Möbiusa zdefiniowana wzorem (7) przyjmuje tylko trzy wartości:  $-1$ ,  $0$  i  $1$ . Prawdopodobieństwa przyjęcia wartości  $\mu(n) = 1$  oraz  $\mu(n) = -1$  są takie same i wynoszą  $3/\pi^2 \approx 0.3039$ , zatem prawdopodobieństwo, że  $\mu(n) = 0$  jest równe  $1 - 6/\pi^2 \approx 0.3921$ .

Tabela 1

$n$	$\frac{1}{2} + i\gamma_n$	$n$	$\frac{1}{2} + i\gamma_n$
1	$\frac{1}{2} + i14.134725142 \dots$	6	$\frac{1}{2} + i37.586178159 \dots$
2	$\frac{1}{2} + i21.022039639 \dots$	7	$\frac{1}{2} + i40.918719012 \dots$
3	$\frac{1}{2} + i25.010857580 \dots$	8	$\frac{1}{2} + i43.327073281 \dots$
4	$\frac{1}{2} + i30.424876126 \dots$	9	$\frac{1}{2} + i48.005150881 \dots$
5	$\frac{1}{2} + i32.935061588 \dots$	10	$\frac{1}{2} + i49.773832478 \dots$

Używając wartości 1 i  $-1$  funkcji Möbiusa, możemy wygenerować jednowymiarowy ruch losowy: gdy  $\mu(n) = 1$  idziemy o krok do góry, gdy  $\mu(n) = -1$  idziemy o krok w dół, a gdy  $\mu(n) = 0$  stoimy w miejscu. Całkowite przesunięcie takiego błądzenia losowego po wykonaniu  $n$  kroków jest dane przez funkcję sumacyjną  $M(n) = \sum_{k \leq n} \mu(k)$ , która nazywana jest funkcją Mertensa. Wiadomo, że średnie przesunięcie w symetrycznym ruchu losowym po wykonaniu  $n$  kroków rośnie jak  $\sqrt{n}$  (niezależnie od wymiaru przestrzeni). To podobieństwo  $M(n)$  do symetrycznego ruchu losowego doprowadziło F. Mertensa pod koniec XIX wieku do przypuszczenia, że  $M(n)$  rośnie nie szybciej niż średnie przesunięcie w błądzeniu losowym, tzn.  $|M(n)| < \sqrt{n}$ . Łatwo pokazać, że z hipotezy Mertensa wynika HR. W 1985 roku A. Odlyzko i H. te Riele [7] obalili przypuszczenie Mertensa. Do dowodu użyli oni wartości pierwszych 2000 zer  $\zeta(s)$  wliczonych z dokładnością 100–105 cyfr. Te obliczenia zajęły 40 godzin na superkomputerze CDC CYBER 750 i 10 godzin na Cray-1. Rezultat Odlyzki i te Riele był wielkim wydarzeniem, o którym pisała nawet prasa codzienna (rys. 3).

W klasycznej książce *Jak to rozwiązać* [9] G. Pólya wskazuje, że czasem ogólniejszy problem może być łatwiejszy do rozwiązania niż przypadek szczególny. HR można uogólnić, rozważając rodzinę funkcji zmiennej zespolonej z parametryzowanej rzeczywistym parametrem  $\lambda$ :

$$H(z, \lambda) = \int_0^{\infty} \Phi(t) e^{\lambda t^2} \cos(zt) dt, \quad (10)$$

# INTERNATIONAL Herald Tribune

Published With The New York Times and The Washington Post

THE HAGUE, WEDNESDAY, FEBRUARY 15, 1984

President's...  
leader of the...  
(Continued on Page 2, Col. 3)

...that we should begin to talk  
and negotiate on the problems that  
at the moment, lie between us.

...als, however, suggested that it  
would not take much substantive  
progress of even much promise of

...peaceful coexistence is needed  
more than ever in the age of nuclear  
missiles.



The Associated Press

## Profile at Winter Olympics

and his skis went up after he took a spill Tuesday in  
slalom at Sarajevo. He was disqualified. His teammate  
ant slalom, won the event. Meanwhile, the British ex-  
in won the gold medal. Stories on Pages 6 and 7.

## Math Theory Gets a Nay After 10 Billion Years

By Lee Dembart

Los Angeles Times Service

LOS ANGELES — A mathematical conjecture, first proposed almost a 100 years ago, that was known to be true for the first 10 billion numbers has been proved false.

Besides being a reminder that in mathematics nothing is true until it is proved true, the finding that the so-called Mertens conjecture is false has important consequences in several fields of study, including number theory and algebra.

"It just shows you again that you have to be very careful," Andrew Odlyzko of Bell Laboratories, one of the disprovers of the Mertens conjecture, said Monday. "Empirical evidence can very often be misleading."

The most significant consequence is that the Riemann hypothesis, considered the most important unsolved problem in mathematics today, remains unsolved. If the Mertens conjecture were true, it would have directly implied the truth of the Riemann hypothesis, which is at the heart of the theory of prime numbers.

However, the falsity of the Mertens conjecture does not imply that the Riemann hypothesis is false. That remains an open question.

Mr. Odlyzko and Herman te Riele of the Center for Mathematics and Computer Science in Amsterdam disproved the Mertens conjecture using fast computers and an improved method of testing. The conjecture, first proposed by J.J. Stieltjes in 1855 and later by F.

Mertens in 1871, is a statement about the behavior of a function derived from the number of prime factors in each whole number from 1 to infinity.

Mr. Odlyzko and Mr. te Riele have not found a single counterexample to the conjecture, and it is not clear that they or anyone ever will. They believe that a counterexample will be found around 10 to the 10th power to the 70th power, which is a number larger than the number of atoms in the universe and well beyond the ability of any computer to calculate.

"No one has an inkling of how you might compute it," Ronald Graham of Bell Laboratories said. "It might conceivably be a problem which you know has to fail but you'll never find a value for which it fails."

Nevertheless, Mr. Odlyzko said Monday, his and Mr. te Riele's work shows that "there are infinitely many counterexamples" to the Mertens conjecture — even if none is ever found.

Using pencil and paper, Mertens himself showed that his hypothesis was true for the first 10,000 integers, which are the whole numbers 1, 2, 3, 4 and so on. In 1913, another mathematician calculated that it was true for the first 5 million integers. In 1963, a computer was used to show that it was true for the first 10 billion integers.

"I would be hard to disprove by computation," he said.

The Mertens conjecture says that the special summation function derived from the number

of prime factors in a number is always less than the number's square root. As the numbers increase, the summation function shows no particular form.

Those who had hoped that the Mertens conjecture was true because of its implications for the Riemann hypothesis will be disappointed. A proof of the Riemann hypothesis would result in important improvements in work on prime numbers, one of the most significant elements of contemporary work in number theory.

So important is the Riemann hypothesis that an entire chapter of a 1977 book was titled "Under the Assumption of the Riemann Hypothesis," and it listed many theorems that depend on it. The hypothesis, proposed by Bernhard Riemann in 1859, involves the places where the Riemann zeta function equals 0. Using computers, the hypothesis has been tested for the first 320 million 0s. Similarly, Fermat's last theorem, another important outstanding problem, has been tested and shown to be true for the first 125,000 numbers.

But, as is shown by the disproof of the Mertens conjecture, just because the Riemann hypothesis is true for the first 320 million 0s does not mean it is always true. It is a similar case for Fermat's last theorem and the first 125,000 exponents.

The problem is that the number of integers is infinite, so no matter how many individual cases are studied, there will always be infinitely many that have not been.

3. Artykuł w „The Herald Tribune” z 15 lutego 1984 omawiający pracę Odlyzki i te Riele. Tytuł nawiązuje do tego, że nierówność  $|M(n)| < \sqrt{n}$  jest spełniona dla  $n$  aż do wielu miliardów, a mimo to gdzieś następuje zmiana znaku nierówności. W pracy [8] pokazano, że na pewno istnieje takie  $n < \exp(1.59 \times 10^{40})$  (liczba ta jest znacznie większa niż liczba atomów w dostępnej obserwacyjnie części Wszechświata), że  $|M(n)| > \sqrt{n}$ .

gdzie

$$\Phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi^2 n^4 e^{9t} - 3\pi n^2 e^{5t}) e^{-\pi n^2 e^{4t}}. \quad (11)$$

Zachodzi związek  $H(z, 0) = \frac{1}{8} \xi(\frac{1}{2}z)$ , gdzie funkcja  $\xi(z)$  związana jest z funkcją dzeta relacją:

$$\xi(iz) = \frac{1}{2} \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) \pi^{-\frac{z}{2} - \frac{1}{4}} \Gamma \left( \frac{z}{2} + \frac{1}{4} \right) \zeta \left( z + \frac{1}{2} \right). \quad (12)$$

Z powyższego związku widać, że  $HR \Leftrightarrow$  wszystkie miejsca zerowe  $\xi(iz)$  są rzeczywiste. W roku 1950 G. De Bruijn udowodnił [10], że dla  $\lambda \geq \frac{1}{2}$  funkcja  $H(z, \lambda)$  ma jedynie rzeczywiste zera oraz że jeżeli  $H(z, \lambda)$  ma tylko rzeczywiste miejsca zerowe dla pewnego  $\lambda'$ , to  $H(z, \lambda)$  ma wyłącznie



rzeczywiste zera dla każdego  $\lambda > \lambda'$ . W roku 1976 Ch. Newman [11] udowodnił, że istnieje taka wartość parametru  $\lambda_1$ , że  $H(z, \lambda_1)$  ma co najmniej jedno zero zespolone. Zatem istnieje taka stała  $\Lambda \in (-\infty < \frac{1}{2})$ , że  $H(z, \lambda)$  ma rzeczywiste zera  $\Leftrightarrow \lambda > \Lambda$ . Aby HR była prawdziwa, wartość parametru  $\lambda = 0$  musi się znajdować w przedziale liczb większych lub równych  $\Lambda$ . Zatem HR jest równoważna temu, że  $\Lambda \leq 0$ . Stała  $\Lambda$  jest teraz nazywana stałą de Bruijna–Newmana. Wartość  $\Lambda$  może być wyznaczona numerycznie. Pierwsze oszacowanie  $-50 < \Lambda$  otrzymali w 1988 roku G. Csordas, T.S. Norfolk i R.S. Varga [12]. Najlepszy wynik komputerowy należy do Y. Saouter i in. [13] i wynosi  $\Lambda > -1.14541 \times 10^{-11}$ . W dniu 19 stycznia 2018 roku w archiwum preprintów arXiv.org ukazała się praca Brada Rodgersa i Terence Tao [14] zawierająca analityczny dowód twierdzenia mówiącego, że stała de Bruijna–Newmana nie może być ujemna.

W 1901 roku H. von Koch udowodnił [15], że prawdziwość HR jest równoważna następującemu błędowi dla przybliżenia funkcji  $\pi(x)$  przez logarytm całkowity

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(\sqrt{x} \log(x)). \quad (13)$$

Później Schoenfeld [16, Corollary 1] podał dokładną wartość stałej liczbowej ukrytej powyżej pod symbolem Big-O:

$$|\pi(x) - \text{Li}(x)| \leq \frac{1}{8\pi} \sqrt{x} \log(x) \text{ dla wszystkich } x \geq 2657. \quad (14)$$

W 2000 roku J.C. Lagarias [17] podał elementarne kryterium dla HR: HR jest równoważna spełnieniu poniższej nierówności dla wszystkich naturalnych  $n$

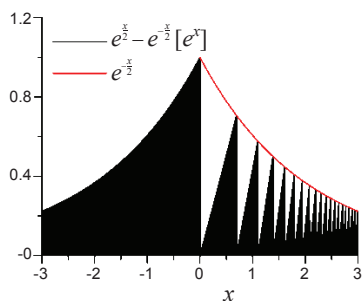
$$\sigma(n) \equiv \sum_{d|n} d \leq H_n + e^{H_n} \log(H_n), \quad (15)$$

gdzie  $\sigma(n)$  jest sumą wszystkich dzielników  $n$ , a  $H_n$  jest  $n$ -tą liczbą harmoniczną  $H_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$ . Aby obalić HR, wystarczy znaleźć jedną wartość  $n$ , dla której powyższa nierówność będzie naruszona. Ponieważ nie jest łatwo wyliczyć  $H_n$  dla  $n \sim 10^{100000}$  z dostateczną dokładnością, K. Briggs [18] rozpoczął sprawdzanie na komputerze podobnego kryterium dla HR podanego wcześniej przez G. Robina [19]:

$$\text{HR} \Leftrightarrow \sigma(n) < e^{\gamma} n \log \log(n) \quad \text{dla } n > 5040. \quad (16)$$

Dla niektórych  $n$  Briggs otrzymał dla różnicy między lewą a prawą stroną powyższej nierówności wartość rzędu  $10^{-6}$ , a więc HR była bliska obaleniu. Przypomnijmy w tym miejscu słowa A. Odlyzki „[...] the Riemann Hypothesis, if true, is just barely true” wypowiedziane w [20] w kontekście stałej de Bruijna–Newmana.

Zauważmy, że przekonanie o prawdziwości HR nie jest powszechne. Kilku słynnych matematyków, m.in. J.E. Littlewood, P. Turán i A.M. Turing, nie wierzyło, że HR jest prawdziwa. A. Ivić podał kilka heurystycznych argumentów stawiających prawdziwość HR pod znakiem zapytania [21] (przedrukowany w [22, str. 137]), który nosił znamieny tytuł *O kilku powodach, aby wątpić w Hipotezę Riemanna*. Gdy znany popularyzator matematyki A.J. Derbyshire zapytał A.M. Odlyzko o jego opinię na temat słuszności HR, ten odpowiedział: „Either it’s true, or else it isn’t” (Albo jest prawdziwa, albo nie jest) [23, str. 389]. Na tej samej stronie można znaleźć argumenty Odlyzko za tym, że jest mało prawdopodobne znalezienie zera poza prostą krytyczną poniżej  $10^{10000}$ .



4. Wykres funkcji występującej w całkowitej reprezentacji (17) funkcji dzeta na prostej krytycznej.

Przejdziemy teraz do związków HR z fizyką. W roku 1947 holenderski fizyk B. van der Pol<sup>1</sup> zbudował urządzenie elektromechaniczne, które sporządzało wykres  $\zeta(\frac{1}{2} + it)$  [24]. Idea działania tego przyrządu była oparta na następującej reprezentacji:

$$\frac{\zeta(\frac{1}{2} + it)}{\frac{1}{2} + it} = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x/2} [e^x] - e^{x/2}) e^{-ixt} dx. \quad (17)$$

Tutaj  $[\cdot]$  oznacza część całkowitą. Powyższe wyrażenie jest transformatą Fouriera funkcji  $y(x) = e^{-x/2} [e^x] - e^{x/2}$ . Wykres tej funkcji przedstawiono na rys. 4. Van der Pol wyciął nożyczkami kształt tej funkcji na obwodzie kartonowego koła. Strumień światła przechodził przez brzeg obracającego się dysku i trafiał do fotokomórki. Powstający w wyniku zjawiska fotoelektrycznego prąd był nałożony na

<sup>1</sup> Większość jego prac była poświęcona łączności radiowej i telewizji. To on w 1920 roku wprowadził równanie różniczkowe opisujące drgania nieliniowego oscylatora, obecnie nazywanego oscylatorem van der Pola.

prąd o zmiennej częstotliwości, co pozwalało w analogowy sposób wykonać transformatę Fouriera. W rezultacie van der Pol otrzymał wykres modułu  $|\zeta(\frac{1}{2} + it)/(\frac{1}{2} + it)|$ , na którym położenie pierwszych 29 nietrywialnych zer dzety można było zlokalizować z dokładnością lepszą niż 1%. Był to niewątpliwie klejnot analogowej techniki obliczeniowej.

Pierwsza jakościowa sugestia mająca doprowadzić do udowodnienia HR metodami fizycznymi została przedstawiona w 1914 roku przez George'a Pólya w trakcie rozmowy z Edmundem Landauem, który zapytał Pólya'a: Znasz trochę fizykę. Czy jest jakiś fizyczny powód, dla którego HR miałyby być prawdziwa? Pólya odpowiedział, że byłoby tak wtedy, gdyby HR dało się powiązać z takim fizycznym problemem, którego wartości własne byłyby rzeczywiste i odpowiadałyby nietrywialnym zerom dzety. Cała ta historia opisana jest w korespondencji Odlyzki z 95-letnim wówczas Pólyą i udostępniona na witrynie internetowej [25]. Należy podkreślić, że rozmowa ta odbyła się wiele lat przed powstaniem mechaniki kwantowej i pojawieniem się równania Schrödingera na poziomy energetyczne. Prawdopodobnie Pólya został zainspirowany przez prace Weyla [26] z lat 1911–1912 o rozkładzie wartości własnych laplasjanów określonych na zwartych obszarach, w szczególności o drganiach własnych bębnow (słynny problem „Czy można usłyszeć kształt bębna?”, [27]). Później podobny pomysł miał przedstawić D. Hilbert i obecnie używa się zwrotu „przypuszczenie Hilberta-Pólya” [25]. Jeżeli HR jest prawdziwa, wtedy można nietrywialne zera uporządkować zgodnie z rosnącą wartością części urojonej i próbować przyporządkować je w sposób wzajemnie jednoznaczny wartościom własnym pewnego operatora hermitowskiego – wszystkie wartości własne takich operatorów są – na mocy matematycznego twierdzenia – rzeczywiste. Trzeba więc znaleźć kwantowy układ fizyczny opisany hamiltonianem o poziomach energetycznych  $E_n = \gamma_n$ . Symbolicznie podejście Pólya–Hilberta można zapisać w postaci  $\zeta(\frac{1}{2} + i\hat{H}) = 0$ , gdzie operator  $\hat{H}$  jest samosprężony  $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$ , a symbol  $^\dagger$  oznacza sprzężenie hermitowskie: jeżeli w przestrzeni Hilberta, w której działa operator  $\hat{A}$ , zadany jest iloczyn skalarny  $(\cdot, \cdot)$ , to  $(\hat{A}^\dagger x, y) = (x, \hat{A}y)$  dla wszystkich wektorów  $x, y$  z dziedziny  $\hat{A}$ . W mechanice kwantowej wartości energii  $E_n$  jakiegoś układu kwantowego otrzymuje się, rozwiązując równanie Schrödingera bez czasu, czyli zagadnienie na wartości własne postaci (gdym nie ma degeneracji)

$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n, \quad (18)$$

gdzie operator  $\hat{H}$  jest nazywany hamiltonianem badanego układu (klasycznie jest sumą energii kinetycznej i energii oddziaływania), a  $\psi_n$  jest funkcją stanu („funkcją falową”) układu mającego energię  $E_n$ .

Około roku 1971 Hugh Montgomery postawił pytanie: czego można się dowiedzieć o odstępach między nietrywialnymi zerami  $\zeta(s)$ , zakładając HR. Rezultat tych badań ukazał się w roku 1973 [28]. W szczególności w pracy tej sformułował on przypuszczenie, że funkcja korelacyjna urojonych części zer dzety ma postać (tutaj liczby  $0 < \alpha < \beta < \infty$  są ustalone):

$$\sum_{\substack{0 < \gamma, \gamma' \leq T \\ \frac{2\pi\alpha}{\log T} \leq \gamma - \gamma' \leq \frac{2\pi\beta}{\log T}}} 1 \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \left( 1 - \left( \frac{\sin \pi u}{\pi u} \right)^2 \right) du, \quad \text{gdy } T \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Wiosną 1972 roku Montgomery odwiedził Instytut Studiów Zaawansowanych w Princeton. Hinduski matematyk Sarvadaman D.S. Chowla, który urodził się w Londynie, zmusił nieśmiałego Montgomery’ego do przedstawienia rezultatów jego badań sławnemu fizykowi Freemanowi Dysonowi. Opis tego zdarzenia można znaleźć w wielu książkach, np. [29, str. 134–136], [23, str. 316–318], [30, str. 263–264]. Dyson natychmiast rozpoznał we wzorze (19) tę samą postać, którą otrzymał na początku lat sześćdziesiątych jako funkcję korelacyjną wartości własnych losowych macierzy z unitarnego zespołu gaussowskiego. Dyson był autorem cyklu prac o statystycznej teorii poziomów energetycznych złożonych układów modelowanych za pomocą macierzy losowych [31], [32]. Współautorem dwóch ostatnich prac był Madan L. Mehta, który później napisał blisko 700-stronicową „biblię” o macierzach losowych [33]. W fizyce macierze losowe pojawiły się w celu opisanego własności ciężkich jąder atomowych. Widma lekkich atomów (np. wodoru – przypadek ściśle rozwiązywalny) są proste i regularne, natomiast widma ciężkich atomów, takich jak np.  $^{238}\text{U}$ , są skomplikowane i rozłożone „chaotycznie”. Nieznane są hamiltoniany oddziaływań w jądrach takich ciężkich atomów, zresztą fizyka układów wielu ciał oparta jest na metodach przybliżonych. Na początku lat pięćdziesiątych ubiegłego wieku przy niektórych reaktorach atomowych kilka grup badawczych rozpoczęło wyznaczanie poziomów energetycznych jąder uranu, bardzo dobre przedstawienie historii tych pomiarów można znaleźć w [34]. W pewnych przypadkach udało się wyznaczyć od kilkuset do ponad tysiąca poziomów. Stwierdzono brak energii leżących blisko siebie, zjawisko to nazwano odpychaniem poziomów.

W przypadku skończenie wymiarowym (18) jest układem równań jednorodnych na współrzędne wektora  $\psi_n$  w jakiejś bazie i aby otrzymać niezerowe wektory własne, wyznacznik układu równań (18) musi zniknąć, więc wartości własne  $\lambda_n$  są rzeczywistymi (bo operator hermitowski ma rzeczywiste wartości własne) rozwiązaniami równania charakterystycznego  $\det(H - \lambda\mathbb{1}) = 0$  – wielomianu stopnia równego rozmiarowi przestrzeni Hilberta, w której działa operator  $\hat{H}$ . Ponieważ nie znamy hamiltonianu dla jąder ciężkich atomów, w latach pięćdziesiątych ubiegłego wieku Eugene Wigner zaproponował, aby do ich opisu używać macierzy dużego wymiaru o losowych elementach wybranych z odpowiednim rozkładem prawdopodobieństwa. Konkretnie oznacza to, że jeżeli  $\mathbf{M}$  jest macierzą kwadratową  $N \times N$  o elementach  $M_{ij}$ , to prawdopodobieństwo  $P(M_{ij} \in (a, b))$  tego, że element macierzowy  $M_{ij}$  przyjmie wartość w przedziale  $(a, b)$ , dane jest całką:

$$P(M_{ij} \in (a, b)) = \int_a^b f_{ij}(x) dx,$$

gdzie  $f_{ij}$  jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa, przy czym elementy  $M_{ij}$  są statystycznie wzajemnie niezależne, co oznacza, że prawdopodobieństwo dla całej macierzy jest iloczynem powyższych czynników dla pojedynczych elementów  $M_{ij}$ . Jednak w zastosowaniach fizycznych macierz ma reprezentować mierzalne rzeczywiste wielkości i dlatego  $\mathbf{M}$  musi być samosprężona („hermitowska”):  $\mathbf{M}^\dagger = \mathbf{M}$ , czyli elementy macierzowe muszą spełniać  $M_{ij} = M_{ji}^*$  i wystarczy wylosować tylko elementy na diagonalu i np. nad nią. Wybór bazy, w której reprezentowany jest hamiltonian, jest sprawą dowolną i zmiana bazy opisanej macierzą unitarną  $\hat{U}$ ,  $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \mathbb{1}$  oznacza przekształcenie podobieństwa  $\hat{U}^{-1} \hat{H} \hat{U} = \hat{H}'$ . Dodatkowo prawdopodobieństwa wylosowania macierzy powiązanych transformacją podobieństwa (tzn. te same operacje zapisane w różnych bazach) muszą być takie same:  $P(\hat{U}^{-1} \hat{H} \hat{U}) = P(\hat{H})$ . Warunki te wyznaczają postać prawdopodobieństwa wylosowania macierzy  $\mathbf{H}$ , zob. [33, Tw 2.6.3, str. 47]:

$$P(\mathbf{H}) = e^{-a \text{tr} H^2 + b \text{tr} H + c}, \quad (20)$$

gdzie  $a$  jest dodatnią liczbą rzeczywistą,  $b$  i  $c$  są rzeczywiste oraz  $\text{tr}$  oznacza ślad macierzy:  $\text{tr} \mathbf{M} = \sum_{i=1}^N M_{ii}$ . Wartość stałej  $c$  wyznacza warunek unormowania prawdopodobieństwa. Dla macierzy samosprężonej (= hermi-

towskiej)  $\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}$  mamy  $\text{tr} H^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N H_{ik} H_{ki} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N H_{ik} H_{ik}^* = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N |H_{ik}|^2$  i wszystkie wyrazy w (20) mają postać gaussowską. Ponieważ eksponenta sumy czynników jest iloczynem, eksponent od każdego czynnika oddzielnie, prawa strona równania (20), istotnie ma postać iloczynu gęstości rozkładów normalnych Gaussa, dlatego taki zespół macierzy losowych nazywa się unitarnym zespołem gaussowskim, po angielsku *Gaussian Unitary Ensemble* i w skrócie GUE. Rozważa się także zespoły ortogonalne gaussowskie GOE (macierze są rzeczywiste oraz symetryczne i dlatego zmiana bazy opisana jest macierzą ortogonalną) oraz symplektyczne zespoły gaussowskie GSE. Podkreślmy, że czynniki gaussowskie otrzymuje się z żądania niezmienniczości prawdopodobieństw wylosowania macierzy względem odpowiednich transformacji podobieństwa macierzy hermitowskich lub symetrycznych. Te różne zespoły macierzy losowych związane są z symetriami układów fizycznych: GOE opisuje układy niezmiennicze względem odbicia czasu, a GUE stosuje się do układów łamiących symetrię odbicia czasu. Wartości własne takich macierzy nie są czysto losowe: przeskalowane (ang. *unfolded*) odstępów  $s$  między nimi nie są opisane przez rozkład Poissona  $e^{-s}$ , lecz np. dla zespołu GUE przez wzór:

$$P(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 e^{-4s^2/\pi}. \quad (21)$$

Przeskalowanie (*unfolding*) oznacza pozbycie się stałego trendu w widmie  $E_1, E_2, \dots$ , tzn. podzielenie  $d_n = E_{n+1} - E_n$  przez średni odstęp między poziomami  $\bar{d}(E) : s_n = (E_{n+1} - E_n) / \bar{d}(E)$ . Dla zer  $\zeta(s)$  na mocy wzoru (9) oznacza to przejście od różnic  $\gamma_{n+1} - \gamma_n$  do zmiennej  $s_n = (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \log(\gamma_n) / 2\pi$ . Na rysunku 5 pokazano porównanie (21) z realnymi odstępami dla zer  $\zeta(s)$ .

Przez kilka lat ujawniony w czasie krótkiej rozmowy Montgomery'ego z Dysonem związek nietrywialnych zer  $\zeta(s)$  z wartościami własnymi macierzy GUE nie wzbudzał dużego zainteresowania. W latach osiemdziesiątych Andrew Odlyzko rozpoczął sprawdzanie przypuszczenia (19) za pomocą superkomputerów Cray-1 i Cray X-MP. Wyniki tych obliczeń ukazały się w 1987 roku w pracy [35] i z grubsza potwierdzały (19). Małe rozbieżności zanikają bardzo wolno z posuwaniem się po prostej krytycznej i Odlyzko kontynuował obliczenia na coraz szybszych komputerach i coraz dalej na prostej krytycznej  $\Re[s] = \frac{1}{2}$  w różnych prze-

działach wokół zera  $n = 10^{20}$  [36], następnie wokół  $\gamma_{10^{21}}$  [37] i na koniec przy zerze o  $n = 10^{22}$  [38]. Te empiryczne dane, zob. rys. 6, potwierdziły słuszność przypuszczenia, że urojone części kolejnych nietrywialnych zer  $\zeta(s)$  wykazują takie samo zachowanie jak różnice między parami wartości własnych losowych macierzy z rozkładem GUE. Dopiero doświadczalne potwierdzenie przypuszczenia Montgomery'ego (19) spowodowało gwałtowny wzrost zainteresowania związkami między zerami dzety Riemanna a wartościami własnymi losowych macierzy. W [39, str. 146] P. Sarnak napisał: „Na poziomie fenomenologicznym jest chyba najbardziej zdumiewające odkrycie dotyczące dzety od czasów Riemanna”. W ten sposób mało konkretna hipoteza Hilberta–Pólya zyskała wiarygodność i teraz wiadomo, że układ fizyczny odpowiadający  $\zeta(s)$  musi łamać symetrię względem odwrócenia czasu. Na konferencji „Quantum chaos and statistical nuclear physics”, która odbyła się w styczniu 1986 roku w Mexico City, Michael Berry wygłosił wykład *Riemann's zeta function: a model for quantum chaos?* [40]. Stał się on manifestem dla tych, którzy chcą udowodnić HR, znajdując odpowiedni operator  $\hat{H}_R$  taki, że  $\hat{H}_R|\Psi_k\rangle = \gamma_k|\Psi_k\rangle$ . Ten hipotetyczny układ kwantowy (abstrakcyjny „pierwiastek”, którego jądro posiada poziomy energetyczne pokrywające się z  $\gamma_n$ ) został nazwany przez O. Bohigasa „Riemannium”, zob. [41, 42], analogicznie do mionium, czyli atomu zbudowanego z antymionu i elektronu albo pozytonium: układu złożonego z elektronu  $e^-$  i pozytonu  $e^+$ , czyli antyelektronu. Dodatkowo w [40] Berry argumentował, że  $\hat{H}_R$  powinien mieć klasyczną granicę, w której wszystkie orbity są chaotyczne.

W roku 1998 ukazała się praca S. Okubo[43] zatytułowana *Lorentz-Invariant Hamiltonian and Riemann Hypothesis*. Nie jest to dokładnie realizacja pomysłu Pólya i Hilberta: występujący w tej pracy dwuwymiarowy operator różniczkowy (hamiltonian):

$$\hat{H} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + i\beta y \frac{\partial}{\partial y} + i(1 - \beta)x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2}, \quad \beta \in \mathbb{R} \quad (22)$$

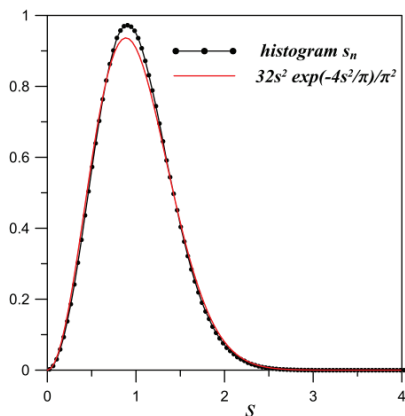
nie posiada jako wartości własne  $\gamma_n$ . Zamiast tego zera dzety występują w specjalnym warunku brzegowym na rozwiązania równania Schrödingera z hamiltonianem (22). Jednak rozwiązania tego równania nie są normalizowalne w naturalnym iloczynie skalarnym.

Rok później M. Berry i J. Keating w pracy [44] zaproponowali inny operator:  $\hat{H}_{BK} = \hat{x}\hat{p}$ , tzn. iloczyn operatora położenia  $\hat{x} = x$  i pędu  $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$ ,

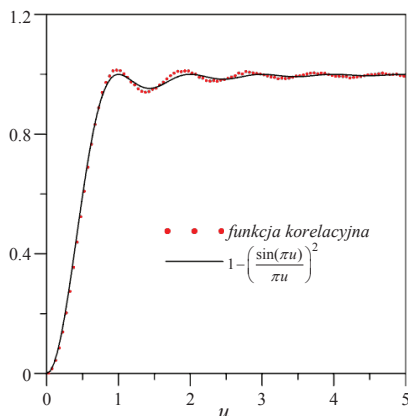
gdzie  $\hbar = 1.055 \dots \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$  jest stałą Plancka. Głównym argumentem za tym był wzór na liczbę poziomów o energii mniejszej niż  $E$ :

$$N(E) = \frac{E}{2\pi} \left( \log \left( \frac{E}{2\pi} \right) - 1 \right) + \frac{7}{8} + \dots,$$

który dokładnie pokrywa się ze wzorem (9), ale nie było dowodu na to, że wartości  $E_n = \gamma_n$ . Zauważmy, że znany jest specjalny rodzaj bilardu, dla którego formuła dająca liczbę wartości energii mniejszej od  $E$  ma wiodące człony dokładnie takie same, jak w (9), jednak dalsze wyrazy się różnią [45, wzory (34–35)]. Przypomnijmy, że dwa bębny mogą mieć różne kształty, ale takie same widmo wibracji, a więc także takie same funkcje zliczające poziomy  $< E$ . W roku 2011 S. Endres and F. Steiner [46] wykazali, że widmo  $\hat{H}_R = \hat{x}\hat{p}$  na dodatniej osi  $x$  jest ciągłe, a zatem  $\hat{H}_R = xp$  nie może być operatorem Hilberta–Pólya, zob. także serię prac G. Sierry, n.p. [47, 48], gdzie rozważano pewne modyfikacje  $\hat{H}_R = \hat{x}\hat{p}$ .



5. Histogram znormalizowanych odstępów między kolejnymi zerami dzęty otrzymany dla 5 000 000 zer. Punkty reprezentujące te odstęp są odległe o  $\Delta s = 0.05$ .



6. Wykres ilustruje przypuszczenie (19) Montgomery’ego dla 5 000 000 zer dzęty. Punkty reprezentujące funkcję korelacyjną były wyliczone ze wzoru po lewej stronie (19) dla 5 000 000 pierwszych zer  $\zeta(s)$  i są odległe o  $\Delta u = 0.05$ .

Wiosną 2017 roku w *Physical Review Letters*, najwyżej punktowanym czasopiśmie fizycznym, ukazała się praca C.M. Bendera, D.C. Dorje i



M.P. Müllera *Hamiltonian for the Zeros of the Riemann Zeta Function* [49], najwierniej realizująca ideę Pólya i Hilberta. Nielokalny operator

$$\hat{H}_{\text{BBM}} = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1} - e^{-\hat{p}}} (\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})(\mathbb{1} - e^{-\hat{p}}) \quad (23)$$

gra rolę hamiltonianu. Widzimy, że  $\hat{H}_{\text{BBM}}$  jest otrzymany z powyższego hamiltonianu Berry–Keatinga  $\hat{H}_{\text{BK}}$  za pomocą transformacji podobieństwa. Funkcje własne są dane przez funkcję dzeta Hurwitza zdefiniowaną dla  $\Re(s) > 1$  i  $q \neq -1, -2, -3, \dots$  przez

$$\zeta(s, q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q+n)^s}. \quad (24)$$

Widać, że funkcja dzeta Riemanna jest specjalnym przypadkiem:  $\zeta(s) = \zeta(s, 0)$ . Funkcja dana przez powyższy szereg (24) ma przedłużenie analityczne na całą płaszczyznę zespoloną bez punktu  $s = 1$  dane przez całkę (por. (3))

$$\zeta(s, q) = \Gamma(1-s) \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{t^{s-1} e^{qt}}{1-e^{-t}} dt,$$

gdzie  $C$  oznacza kontur całkowania Hankela, taki jak w równaniu (3). Autorzy [49] pokazują następnie, że  $\psi_s(x) = -\zeta(s, x+1)$  spełnia równanie na wartości własne  $\hat{H}_{\text{BBM}}\psi_s(x) = i(2s-1)\psi_s(x)$ . Tak więc warunek brzegowy  $\psi_s(0) = 0 = \zeta(s, 0) = \zeta(s)$  implikuje, że  $s$  są zerami funkcji dzeta Riemanna, jeżeli HR jest spełniona. Należy „tylko” pokazać, że  $\hat{H}_{\text{BBM}}$  jest hermitowski. Niestety nie zachodzi to dla zwykłego iloczynu skalarnego w przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem. Autorzy [49] wprowadzają inny iloczyn skalarny, względem którego  $\hat{H}_{\text{BBM}}$  jest hermitowski, jednak teraz w tym iloczynie skalarnym funkcje własne mają nieskończoną normę.

W sierpniu 1998 roku podczas konferencji w Seattle poświęconej 100-leciu twierdzenia o liczbach pierwszych P. Sarnak zaoferował butelkę dobrego wina dla fizyków, którzy z prawa Montgomery’ego–Odlyzki potrafią otrzymać informacje nieznanne wcześniej matematykom. Już dwa lata później musiał pójść do sklepu po obiecane wino. Na konferencji w Wiedniu we wrześniu 1998 roku Jonathan Keating wygłosił wykład, podczas którego podał rozwiązanie (ale nie dowód) tzw. problemu momentów dzety. Wyniki te ukazały się we wspólnej pracy z jego

doktorantką Niną Snaith [50]. Od blisko stu lat matematycy starali się wyliczyć momenty funkcji dzeta na prostej krytycznej

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^{2k} dt, \quad \text{gdy } T \rightarrow \infty \quad (25)$$

G.H. Hardy i J.E. Littlewood blisko sto lat temu [51, Tw. 2.41] wyliczyli drugi moment:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^2 dt \sim \log(T), \quad \text{gdy } T \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Czwarty moment wyliczył A.E. Ingham w 1926 roku [52, Tw. B]

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^4 dt \sim \frac{1}{2\pi} \log^4(T), \quad \text{gdy } T \rightarrow \infty. \quad (27)$$

Wyższych momentów, mimo wielu wysiłków, nie udało się wyliczyć, ale znana była przypuszczalna postać dla  $k = 3$  [53]:

$$\int_1^T |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^6 dt \sim \frac{42}{9!} \prod_p \left\{ \left(1 - \frac{1}{p}\right)^4 \left(1 + \frac{4}{p} + \frac{1}{p^2}\right) \right\} T \log^9 T \quad \text{dla dużych } T, \quad (28)$$

a także jeszcze bardziej skomplikowane wyrażenie dla  $k = 4$  [54]: dla dużych  $T$  zachodzi

$$\int_0^T |\zeta(1/2 + it)|^8 dt \sim \frac{24024}{16!} \prod_p \left\{ \left(1 - \frac{1}{p}\right)^9 \left(1 + \frac{9}{p} + \frac{9}{p^2} + \frac{1}{p^3}\right) \right\} T \log^{16} T. \quad (29)$$

Keating i Snaith udowodnili ogólne twierdzenie o momentach losowych macierzy, których wartości własne mają rozkład GUE i jeżeli zachowanie  $\zeta(s)$  jest modelowane przez wyznacznik takich macierzy, to ich wynik zastosowany do dzety daje

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^{2k} dt \sim f_{ka}(k)(\log T)^{k^2}, \quad (30)$$

gdzie

$$a(k) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(m+k)}{m! \Gamma(k)}\right)^2 p^{-m}, \quad (31)$$

a liczby  $f_k$  są dane wzorem:

$$f_k = \frac{G^2(k+1)}{G(2k+1)}.$$

W powyższym wzorze  $G(\cdot)$  jest funkcją Barnesesa spełniającą rekurencję  $G(z+1) = \Gamma(z)G(z)$ , czyli dla naturalnych argumentów funkcja ta jest „silnią po silniach”:  $G(n) = 1! \cdot 2! \cdot 3! \dots (n-2)!$ . Oczywiście wynik Keatinga i Snaith daje wzory (26)–(29) odpowiednio dla  $k = 1, 2, 3$  i 4.

Od kilku lat rozwijana jest idea kwantowych komputerów. Odkrycie przez Petera Shora kwantowego algorytmu faktoryzacji [55] pokazało, że klasyczne problemy o dużej złożoności mogą zostać znacznie przyspieszone (przynajmniej w teorii) z pomocą komputerów kwantowych. Czy jest możliwe zaprojektowanie kwantowego komputera weryfikującego HR? Mamy tutaj na myśli coś bardziej pomysłowego niż np. połączenie algorytmu Shora z kryterium Lagarias. W roku 2013 pojawiła się praca [56], w której autorzy (zakładając HR) skonstruowali unitarny operator z wartościami własnymi równymi kombinacji nietrywialnych zer dzety  $\rho_j^*/\rho_j$  – takie kombinacje leżą oczywiście na kole jednostkowym. Następnie skonstruowali oni kwantowy układ realizujący tę unitarną macierz. Inny kwantowy komputer weryfikujący HR został zaproponowany w [57, Sect. IIC]. Jego działanie oparte jest na kwantowym obliczaniu ilości liczb pierwszych mniejszych niż  $x$ , zaproponowanym przez tych samych autorów w [58], i szukaniu naruszenia nierówności (14). Dodajmy, że w podobny sposób Latorre i Sierra proponują szukać liczbę Skewesa [57, Sect. IID]. Niedawno ukazała się praca [59], w której zaproponowano doświadczalną realizację  $\zeta(s)$  za pomocą chłodnych atomów.

W pracy [60] M. Shlesinger badał specjalny 1-wymiarowy ruch losowy tak zdefiniowany, aby mógł być powiązany z HR. Prawdopodobieństwo skoku do węzła odległego o  $\pm l$  kroków wyraża się jawnie przez funkcję Möbiusa:

$$p(\pm l) = \frac{1}{2} C \left( \frac{1}{l^{1+\beta}} \pm \frac{\mu(l)}{l^{1+\beta-\epsilon}} \right), \quad \beta > 0,$$

gdzie  $C = \frac{1}{\zeta(1+\beta) + \frac{1}{\zeta(1+\beta)}}$  jest czynnikiem normalizacyjnym. Takie błędzenie losowe Shlesinger nazwał ruchem losowym „Riemanna–Möbiusa”. Pewne ogólne własności tzw. funkcji struktury  $\lambda(k)$ , która jest transformatą Fouriera prawdopodobieństw  $p(l)$ :  $\lambda(k) = \sum_l e^{ikl} p(l)$ , pozwoliły Shlesingerowi zlokalizować zespolone zera dzety wewnątrz pasa krytycznego, jednak wyniku J. Hadamarda i Ch.J. de la Vallée–Poussina  $\zeta(1 + it) \neq 0$  nie udało się otrzymać tą metodą. Ciekawe, że istnienie zer poza prostą krytyczną nie jest sprzeczne z zachowaniem  $\lambda(k)$ , wynikającym z ogólnych zasad prawdopodobieństwa.

W pracy [61] podana została stochastyczna interpretacja funkcji dzeta. Istnieje wiele innych związków HR z ruchami losowym lub ruchami Browna, w pracy [62] można znaleźć obszerny przegląd rezultatów wyrażających wartości oczekiwane różnych zmiennych losowych przez  $\zeta(s)$ .

Równanie funkcyjne (5) może być zapisane w niesymetrycznej postaci:

$$2\Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) \zeta(s) = (2\pi)^s \zeta(1-s).$$

Ta postać jest podobna do relacji dualności Kramersa–Wanniera [63] dla sumy stanów  $Z(J)$  dwuwymiarowego modelu Isinga z parametrem  $J$  wyrażonym w jednostkach  $kT$ :

$$Z(J) = 2^N (\cosh(J))^{2N} (\tanh(J))^N Z(\tilde{J}), \quad (32)$$

gdzie  $N$  oznacza liczbę spinów, a  $\tilde{J}$  jest związana z  $J$  relacją  $e^{-2\tilde{J}} = \tanh(J)$ , por. np. [64]. Suma statystyczna  $Z(\beta)$  jest podstawową wielkością używaną w fizyce statystycznej, tutaj  $\beta = 1/k_B T$ , gdzie  $k_B = 1.3806488 \dots \times 10^{-23}$  [J/K] jest stałą Boltzmanna, a  $T$  jest temperaturą bezwzględną. Pozostałe funkcje termodynamiczne (energia całkowita, energia swobodna, entropia, ciśnienie itd.) mogą być wyrażone jako jej pochodne. Dla układu wymieniającego ciepło z otoczeniem przy ustalonej liczbie cząstek, temperaturze i objętości, mogącego się znajdować w mikrostanach o energiach  $E_n$ , jest ona zdefiniowana wzorem:

$$Z(\beta) = \sum_n e^{-\beta E_n}. \quad (33)$$

Przejścia fazowe, tzn. nieciągłości różnych wielkości wyrażonych przez pochodne sumy stanów, występują tam, gdzie  $Z(\beta) = 0$ . Z powyższej de-

finicji widać jednak, że sumy stanów nie mają zer dla rzeczywistych temperatur, dopiero przedłużone analitycznie na całą płaszczyznę zespoloną mają zera zespolone leżące na okręgu. Jedynie w granicy termodynamicznej  $N \rightarrow \infty$  zespolone zera mają punkt skupienia przy rzeczywistej wartości temperatury. Pierwsze tego typu twierdzenia udowodnili C.N. Yang i T.D. Lee [65, 66]. W języku polskim można się zapoznać z teorią Yanga–Lee w [67, str. 351–354]. Ponieważ te twierdzenia „kołowe” ograniczają położenie zer, nasuwa się pomysł zastosowania ich do HR. Aby kontynuować tę analogię, trzeba znaleźć układ, którego suma stanów będzie wyrażona przez  $\zeta(s)$ . Wtedy można mieć nadzieję udowodnienia HR, powołując się na twierdzenie Lee–Yanga. Twierdzenie to dotyczy przejść fazowych układów spinowych w zewnętrznym polu magnetycznym, zob. praca przeglądowa [68]. M. Fisher [69] z kolei rozpoczął szukanie zer sumy stanów na zespolonej płaszczyźnie temperatury i także okazało się, że dla specjalnego układu Isinga zanurzonego w polu magnetycznym zera kanonicznej sumy stanów również leżą na okręgu jednostkowym, tym razem na zespolonej płaszczyźnie zmiennej  $v = \sinh(2J\beta)$ , gdzie  $J > 0$  jest stałą sprzężenia z polem magnetycznym. Prosta krytyczna  $s = \frac{1}{2} + it$  może być odwzorowana na okrąg jednostkowy za pomocą transformacji  $s \rightarrow u = s/(1-s) = (\frac{1}{2} + it)/(\frac{1}{2} - it)$ , wtedy  $|u| = 1$ . Tak więc przez dobór odpowiedniego układu spinowego z sumą stanów  $Z(\beta)$  wyrażoną przez  $\zeta(s)$  można się starać udowodnić HR, powołując się na twierdzenie Lee–Yanga.

W serii prac A. Knauf [70] podjął powyżej opisany plan zaatakowania HR. W tych pracach wprowadził on układ spinowy z sumą stanów wyrażoną w granicy termodynamicznej przez funkcję dzeta:  $Z(s) = \zeta(s-1)/\zeta(s)$  ze zmienną  $s$  interpretowaną jako odwrotność temperatury. Jednakże postać oddziaływania między spinami w tym modelu nie należy do klasy, do której stosują się twierdzenia „kołowe”. Ta idea była dalej podjęta w pracy [71]. Autorzy pracy [72] udowodnili, że HR jest równoważna nierównościom spełnianym przez stany Kubo–Martina–Schwingera w dynamicznym układzie kwantowym Bosta i Connesa rozważanym w odpowiednim zakresie temperatur. Funkcja  $\zeta(s)$  występuje w wielu innych miejscach: w teorii bozonów i fermionów, teorii kondensatu Bosego–Einsteina condensate, zob. np. [73, rozdz. III E].

W 2005 roku w prestiżowym Physical Review Letters ukazał się artykuł [74], w którym L.A. Bunimovich oraz C.P. Dettmann rozważali

punktową cząstkę odbijającą się w kołowym bilardzie, na obwodzie którego zrobiono mały otwór, widziany ze środka okręgu pod kątem  $\epsilon$ . Niech  $P_1(t)$  oznacza prawdopodobieństwo, że kulka nie wypadnie poza bilard z jednym otworem do czasu  $t$ . Bunimovich i Dettmann otrzymali dokładny wzór na  $P_1(t)$  wyrażony przez  $\zeta(s)$  i pokazali, że HR jest równoważna temu, że

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon^\delta (tP_1(t) - 2/\epsilon) = 0 \quad (34)$$

będzie zachodzić dla każdego  $\delta > -1/2$ . Wartość  $1/2$  jest wprost związana z położeniem zer dzety na prostej  $\Re[s] = \frac{1}{2}$ . Bardziej skomplikowany wzór Bunimovich i Dettmann otrzymali dla bilardu z dwoma otworami. W zasadzie możliwe jest przeprowadzenie doświadczeń weryfikujących (34) za pomocą wnek mikrofalowych lub bilardów zbudowanych z mikrolaserów. Takie doświadczenia mogą obalić HR, gdyby się okazało, że zachowanie różnicy  $tP_1(t) - 2/\epsilon$  w granicy, gdy rozmiar otworu  $\epsilon \rightarrow 0$  będzie wolniejsze niż  $\epsilon^{1/2}$ .

W książce [30, str. p.286] (fragment dostępny pod adresem <http://tinyurl.com/yd5cvqu2>) opisana jest wizyta Jona Keatinga w bibliotece w Getyndze, gdzie przechowywane są notatki Riemanna. Keating chciał obejrzeć rachunki związane z HR oraz z pewnym problemem z hydrodynamiki. Spodziewał się, że dostanie dwa pudła, a bibliotekarz przyniósł mu jedną paczkę notatek. Okazało się, że Riemann w tym samym czasie pracował nad rozmieszczeniem liczb pierwszych oraz stabilnością obracającej się cieczy o kształcie kuli. Problem stabilności cieczy zależał od tego, czy pewne liczby leżą na płaszczyźnie zespolonej dokładnie na prostej równoległej do osi urojonej. Być może ten fakt z fizyki pomógł Riemannowi sformułować jego słynną hipotezę?

Dziękuję Profesorowi Krzysztofowi Maślance za przeczytanie manuskryptu i szereg uwag oraz udostępnienie rysunku 3.

## Literatura

- [1] B. Riemann, "Ueber die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen größe," *Monatsberichte der Berliner Akademie*, pp. 671–680, November 1859. English translation available at <http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann>.

- [2] M. Milgram, "Integral and Series Representations of Riemann's Zeta Function and Dirichlet's Eta Function and a Medley of Related Results," *Journal of Mathematics*, vol. 2013, p. Article ID 181724, 2013.
- [3] J. P. Gram, "Note sur les zéros de la fonction de Riemann," *Acta Math.*, vol. 27, pp. 289–304, 1903.
- [4] A. M. Turing, "Some calculations of the Riemann zeta-function," *Proc. London Math. Soc. (3)*, vol. 3, pp. 99–117, 1953.
- [5] S. Wedeniwski, "Zetagrid Project." <http://think-automobility.org/geek-stuff/zetagrid>.
- [6] K. Broughan, *Equivalents of the Riemann Hypothesis*, vol. 1 and 2. Cambridge University Press, 2017.
- [7] A. M. Odlyzko and H. J. J. te Riele, "Disproof of the Mertens Conjecture," *J. Reine Angew. Math.*, vol. 357, pp. 138–160, 1985.
- [8] T. Kotnik and H. te Riele, "The Mertens conjecture revisited," in *7-th ANTS*, vol. 4076 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 156–167, 2006.
- [9] G. Pólya, *Jak to rozwiązać?* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2011.
- [10] N. de Bruijn, "The roots of trigonometric integrals," *Duke Math. J.*, vol. 17, no. 3, pp. 197–226, 1950.
- [11] C. M. Newman, "Fourier transforms with only real zeros," *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 61, no. 2, pp. 245–251, 1976.
- [12] G. Csordas, T. S. Norfolk, and R. S. Varga, "A lower bound for the de Bruijn-Newman constant  $\Lambda^*$ " *Numerische Mathematik*, vol. 52, 1988.
- [13] Y. Saouter, X. Gourdon, and P. Demichel, "An improved lower bound for the de Bruijn-Newman constant," *Mathematics of Computation*, vol. 80, pp. 2281–2287, 2011.
- [14] B. Rodgers and T. Tao, "The De Bruijn-Newman constant is non-negative," *math.NT/1801.05914*, Jan. 2018.
- [15] H. von Koch, "Sur la distribution des nombres premiers," *Acta Math.*, vol. 24, pp. 159–182, 1901.
- [16] L. Schoenfeld, "Sharper Bounds for the Chebyshev Functions  $\theta(x)$  and  $\psi(x)$ . II," *Mathematics of Computation*, pp. 337–360, 1976.
- [17] J. C. Lagarias, "An elementary problem equivalent to the Riemann Hypothesis," *Amer. Math. Monthly*, vol. 109, pp. 534–543, 2002.
- [18] K. Briggs, "Abundant Numbers and the Riemann Hypothesis," *Experimental Mathematics*, vol. 15, Number 2, pp. 251–256, 2006.
- [19] G. Robin, "Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et Hypothèse de Riemann," *J. Math. Pures Appl. (9)*, vol. 63, no. 2, pp. 187–213, 1984.
- [20] A. M. Odlyzko, "An improved bound for the de Bruijn–Newman constant," *Numerical Algorithms*, vol. 25, no. 1, pp. 293–303, 2000.
- [21] A. Ivič, "On some reasons for doubting the Riemann hypothesis," *arXiv:math/0311162*, Nov. 2003.

- [22] P. Borwein, S. Choi, B. Rooney, and A. Weirathmueller, *The Riemann Hypothesis: A Resource For The Afficionado And Virtuoso Alike*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2007.
- [23] J. Derbyshire, *Obsesja liczb pierwszych*. Poznań: NAKOM, 2009.
- [24] B. Van der Pol, "An Electro-Mechanical Investigation Of The Riemann Zeta Function In The Critical Strip," *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 53, pp. 976–981, 1947.
- [25] Korespondencja o początkach przypuszczenia Hilberta–Pólya na stronie [www.A. Odlyzko](http://www.dtc.umn.edu/odlyzko/polya/index.html). <http://www.dtc.umn.edu/odlyzko/polya/index.html>.
- [26] H. Weyl, "Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte," *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, vol. 2, pp. 110–117, 1911.
- [27] M. Kac, "Can one hear the shape of a drum?," *The American Mathematical Monthly*, vol. 73, no. 4, pp. 1–23, 1966.
- [28] H. L. Montgomery, "The pair correlation of zeros of the zeta function," in *Analytic Number Theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIV, St. Louis Univ., St. Louis, MO., 1972)*, pp. 181–193, Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1973.
- [29] K. Sabbagh, *The Riemann hypothesis : the greatest unsolved problem in mathematics*. New York: Farrar, Straus, and Giroux, 2002.
- [30] M. Sautoy, *The music of the primes: searching to solve the greatest mystery in mathematics*. New York: HarperCollins, 2003.
- [31] F. J. Dyson. Statistical theory of the energy levels of complex systems. I, II, III. *Journal of Mathematical Physics*, 3(1):140–156, 157–165, 166–175, 1962. *Journal of Mathematical Physics*, 4(5):713–719, 1963. pp. 701–712, 1963.
- [32] M. L. Mehta and F. J. Dyson, "Statistical theory of the energy levels of complex systems. IV, V," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 4, no. 5, pp. 701–712, 1963. *Journal of Mathematical Physics*, vol. 4, no. 5, pp. 713–719, 1963.
- [33] M. L. Mehta, *Random Matrices*. San Diego, California: Academic Press, second ed., 1991.
- [34] F. W. K. Firk and S. J. Miller, "Nuclei, primes and the random matrix connection," *Symmetry*, vol. 1, no. 1, pp. 64–105, 2009.
- [35] A. M. Odlyzko, "On the distribution of spacings between zeros of the zeta function," *Math. Comp.*, vol. 48, pp. 273–308, 1987.
- [36] A. M. Odlyzko, "The  $10^{20}$ -th zero of the Riemann zeta function and 175 million of its neighbors." 1992 revision of 1989 manuscript.
- [37] A. M. Odlyzko, "The  $10^{21}$ -st zero of the Riemann zeta function." Nov. 1998 note for the informal proceedings of the Sept. 1998 conference on the zeta function at the Edwin Schroedinger Institute in Vienna.
- [38] A. M. Odlyzko, "The  $10^{22}$ -nd zero of the Riemann zeta function," in *Dynamical, Spectral, and Arithmetic Zeta Functions* (M. van Frankenhuysen and M. L. Lapidus, eds.), no. 290 in Amer. Math. Soc., Contemporary Math. series, pp. 139–144, 2001.



- [39] P. Sarnak, "Quantum Chaos, Symmetry, and Zeta functions, II: Zeta functions," in *Current Developments in Mathematics* (R. Bott, A. Jaffe, D. Jerison, G. Lusztig, I. Singer, and S.-T. Yau, eds.), vol. 1997, pp. 145–159, International Press, 1997.
- [40] M. V. Berry, "Riemann's zeta function: a model for quantum chaos?," in *Quantum chaos and statistical nuclear physics* (T. H. Seligman and H. Nishioka, eds.), vol. 263 of *Lecture Notes in Physics*, pp. 1–17, Springer Berlin / Heidelberg, 1986.
- [41] P. Leboeuf, A. G. Monastera, and O. Bohigas, "The Riemannium," *Regular and Chaotic Dynamics*, vol. 6, pp. 205–210, 2001.
- [42] B. Hayes, "The Riemannium," *American Scientist*, vol. 91, pp. 296–300, July–August 2003.
- [43] S. Okubo, "Lorentz-invariant Hamiltonian and Riemann hypothesis," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 31, no. 3, pp. 1049–1057, 1998.
- [44] M. Berry and J. Keating, " $H = xp$  and the Riemann Zeros," in *Supersymmetry and Trace Formulae: Chaos and Disorder*, vol. 370 of *NATO ASI Series B Physics*, pp. 355–368, Plenum Press, 1999.
- [45] F. Steiner and P. Trillenber, "Refined asymptotic expansion for the partition function of unbounded quantum billiards," *J. Math. Phys.*, vol. 31, no. 7, pp. 1670–1676, 1990.
- [46] S. Endres and F. Steiner, "The Berry–Keating operator on  $L^2(\mathbb{R}_+, dx)$  and on compact quantum graphs with general self-adjoint realizations," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 43, no. 9, p. 095204, 2010.
- [47] G. Sierra and J. Rodriguez-Laguna, "The  $H = xp$  model revisited and the Riemann zeros," *Physical Review Letters*, vol. 106, p. 200201, 2011.
- [48] G. Sierra, "General covariant  $xp$  models and the Riemann zeros," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 45, no. 5, p. 055209, 2012.
- [49] C. M. Bender, D. C. Brody, and M. P. Müller, "Hamiltonian for the zeros of the Riemann zeta function," *Physical Review Letters*, vol. 118, p. 130201, 2017.
- [50] J. Keating and N. Snaith, "Random matrix theory and  $\zeta(1/2 + it)$ ," *Commun. Math. Phys.*, vol. 214, pp. 57 – 89, 2000.
- [51] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, "Contributions to the theory of the Riemann zeta function and the theory of prime distribution," *Acta Mathematica*, vol. 41, pp. 119–196, 1918.
- [52] A. Ingham, "Mean-Value Theorems in the Theory of the Riemann Zeta-Function," *Proc. London Math. Soc.*, vol. s2-27, pp. pp. 273–300, 01 1928.
- [53] J. B. Conrey and A. Ghosh, "A conjecture for the sixth power moment of the Riemann zeta-function," *Int. Math. Res. Notices*, vol. 1998, pp. 775–780, 1998.
- [54] J. B. Conrey and S. M. Gonek, "High moments of the Riemann zeta-function," *Duke Math. J.*, vol. 107, pp. 577–604, 04 2001.

- [55] P. W. Shor, "Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer," *arXiv:quant-ph/9508027*, Aug. 1995.
- [56] R. V. Ramos and F. V. Mendes, "Riemannian Quantum Circuit," *Physics Letters A*, vol. 378, pp. 1346–1349, May 2014.
- [57] J. I. Latorre and G. Sierra, "There is entanglement in the primes," *Quantum Information & Computation*, vol. 15, no. 7&8, pp. 0622–0659, 2015.
- [58] J. I. Latorre and G. Sierra, "Quantum computation of prime number functions," *Quantum Information & Computation*, vol. 14, no. 7&8, pp. 0577–0588, 2014.
- [59] C. E. Creffield and G. Sierra, "Finding zeros of the riemann zeta function by periodic driving of cold atoms," *Phys. Rev. A*, vol. 91, p. 063608, Jun 2015.
- [60] M. F. Shlesinger, "On the Riemann hypothesis: a fractal random walk approach," *Physica. A*, vol. 138, no. 1–2, pp. 310–319, 1986.
- [61] K. S. Alexander, K. Baclawski, and G. C. Rota, "A stochastic interpretation of the Riemann zeta function," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 90, no. 2, pp. 697–699, 1993.
- [62] P. Biane, J. Pitman, and M. Yor, "Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions," *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 38, no. 4, pp. 435–465, 2001.
- [63] H. A. Kramers and G. H. Wannier, "Statistics of the Two-Dimensional Ferromagnet. Part I," *Phys. Rev.*, vol. 60, pp. 252–262, Aug 1941.
- [64] R. P. Feynman, *Statistical mechanics: a set of lectures by R. P. Feynman*. Frontiers in physics, New York, NY, USA: W. A. Benjamin, Inc., 1972. Notes taken by R. Kikuchi and H. A. Feiveson. Edited by Jacob Shaham.
- [65] C. N. Yang and T. D. Lee, "Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. I. Theory of Condensation," *Phys. Rev.*, vol. 87, pp. 404–409, Aug 1952.
- [66] T. D. Lee and C. N. Yang, "Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. II. Lattice Gas and Ising Model," *Phys. Rev.*, vol. 87, pp. 410–419, Aug 1952.
- [67] J. Łopuszański and A. Pawlikowski, *Fizyka Statystyczna*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1969.
- [68] I. Bena, M. Droz, and A. Lipowski, "Statistical Mechanics Of Equilibrium And Nonequilibrium Phase Transitions: The Yang–Lee Formalism," *International Journal of Modern Physics B*, vol. 19, no. 29, pp. 4269–4329, 2005.
- [69] M. E. Fisher, "The nature of critical points," in *Lectures in Theoretical Physics* (W. Brittin, ed.), vol. VIIC, p. p.1, University of Colorado Press, Boulder, Colorado, 1965.
- [70] A. Knauf, "On a ferromagnetic spin chain," *Communications in Mathematical Physics*, vol. 153, no. 1, pp. 77–115, 1993.

- [71] J. Fiala and P. Kleban, "Generalized Number Theoretic Spin Chain – Connections to Dynamical Systems and Expectation Values," *Journal of Statistical Physics*, vol. 121, no. 3-4, pp. 553–577, 2005.
- [72] M. Planat, P. Solé, and S. Omar, "Riemann hypothesis and quantum mechanics," *Journal of Physics A Mathematical General*, vol. 44, p. 145203, Apr. 2011.
- [73] D. Schumayer and D. A. W. Hutchinson, "Physics of the Riemann hypothesis," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 83, pp. 307–330, Apr 2011.
- [74] L. Bunimovich and C. Dettmann, "Open Circular Billiards and the Riemann Hypothesis," *Physical Review Letters*, vol. 94, no. 10, p. 100201, 2005.