CZY ŚWIAT BYŁBY GORSZY, GDYBY HIPOTEZA RIEMANNA BYŁA FAŁSZYWA?

Jerzy Kaczorowski

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Niniejszy esej jest nieco rozbudowaną wersją wykładu wygłoszonego w dniu 29 listopada 2017 roku w ramach cyklu „Dwugłos Nauki", organizowanego przez Polską Akademię Nauk Oddział w Poznaniu we współpracy z Wydziałem Teologicznym UAM. Zgodnie z duchem tych spotkań, odczyt był adresowany do szerokiego grona słuchaczy, wśród których matematycy stanowili zdecydowaną mniejszość. Taka formuła spotkań wymusza odpowiedni styl prezentowania treści, którego nadrzędnym przesłaniem jest komunikatywność. Biorąc to pod uwagę, starałem się ograniczyć do niezbędnego minimum szczegóły techniczne, które mogłyby być mało zrozumiałe dla niespecjalisty. Matematyk, a w szczególności teoretyk liczb, dowie się tutaj niewiele nowego i może czuć pewien niedosyt, a także odnieść wrażenie, że nie wszystkie ważne aspekty spraw związanych z Hipotezą Riemanna zostały przez mnie nakreślone z dostateczną precyzją. Zamiast tego próbowałem nakreślić zasadnicze idee, a także prześledzić historyczne tło omawianych zagadnień. Mam nadzieję, że pozwoli to na głębsze zaznajomienie osób, które nie parają się profesjonalnie matematyką – lecz doceniają jej głębię – z jednym z najbardzej fascynujących, otwartych problemów matematycznych.

PREHISTORIA HIPOTEZY RIEMANNA: EUKLIDES, EULER, GAUSS

Wielkie problemy nauki mają bogatą historię, a ich rozwiązanie otwiera zwykle nowy rozdział w jej rozwoju. Hipoteza Riemanna, której poświęcone są niniejsze rozważania, sięga swoimi korzeniami bardzo głęboko, bo aż do starożytności. Mimo że w chwili obecnej nadal pozostaje nierozstrzygnięta, można śmiało powiedzieć, że prace nad nią już teraz zaowocowały wieloma wartościowymi wynikami, a nawet więcej – nowymi kierunkami badań. Przyczyniły się również do odkrycia nieoczekiwanych związków między – zdawałoby się – odległymi obszarami badań, takimi jak na przykład arytmetyka liczb całkowitych i fizyka kwantowa. Jej udowodnienie lub obalenie miałoby dramatyczne konsekwencje wewnątrz matematyki, w szczególności w teorii liczb.

Przyczynę tak odległej czasowo genezy Hipotezy należy tłumaczyć jej związkami z najbardziej podstawowym pojęciem matematycznym, a mianowicie z pojęciem liczby. Wiadomo, że matematyka bada m.in. liczby, a także wykorzystuje je do opisu innych obiektów. Można powiedzieć, że matematyka bez liczb nie mogłaby istnieć. Najbardziej podstawowym rodzajem liczb są liczby naturalne, to znaczy dodatnie liczby całkowite: $1, 2, 3, \ldots$ Pozostałe rodzaje liczb, na przykład liczby wymierne, rzeczywiste czy zespolone, mogą być zdefiniowane (skonstruowane) w sposób jawny przy użyciu liczb naturalnych. Słynny matematyk niemiecki Leopold Kronecker powiedział, że *Bóg stworzył liczby naturalne, wszystko inne jest dziełem człowieka*. Nic więc dziwnego, że liczby były obiektem zainteresowania matematyków od samego początku. Bardzo szybko odkryto, że liczby naturalne większe od 1 dzielą się na dwie kategorie: liczby pierwsze i złożone. Liczby pierwsze, a więc takie, które mają tylko dwa dzielniki naturalne, pełnią rolę swego rodzaju atomów, bowiem każda liczba naturalna większa od 1 jest liczbą pierwszą lub też iloczynem takich liczb, przy czym rozkład ten jest jednoznaczny z dokładnością do kolejności czynników. Początkowe liczby pierwsze to

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 27, 29, 31, \ldots$$

Rodzi się tutaj naturalne pytanie: czy powyższy ciąg w pewnym momencie się kończy, czy też może być przedłużany w nieskończoność? Pytamy w istocie o to, czy istnieje największa liczba pierwsza?

Euklides (365 r. p.n.e.–ok. 300 r. p.n.e.), matematyk grecki pochodzący z Aten, przez większość życia działający w Aleksandrii, odpowiedział na nie, dowodząc, że *liczb pierwszych jest nieskończenie wiele*[1]. W szczególności wynika stąd, że największej liczby pierwszej nie ma: jakąkolwiek ustalimy granicę, na przykład $N = 10^{100000000000}$, to istnieje liczba pierwsza p większa od N. Warto tutaj zaznaczyć, że w chwili obecnej (2018) nie znamy żadnej tak wielkiej liczby pierwszej i nie jesteśmy w stanie jej znaleźć nawet przy użyciu najpotężniejszych komputerów. Niemniej jednak wiemy, na podstawie twierdzenia Euklidesa, że liczba taka na pewno istnieje. Jest w tym momencie jasne, że twierdzenia Euklidesa nie można udowodnić „rachunkowo", lecz należy je uzasadnić, przeprowadzając odpowiednie rozumowanie. Nie jest ono specjalnie złożone czy też trudne, ale znaczenie samego twierdzenia jest ogromne. Mówi bowiem ono, że „atomów" – lub inaczej mówiąc elementarnych cegiełek, z których zbudowane się pozostałe liczby naturalne – jest bardzo dużo. Jest więc z czego budować i w związku z tym można oczekiwać, że nie zabraknie budulca do tworzenia nawet najbardziej skomplikowanych konstrukcji matematycznych, zdolnych do opisu bardzo złożonych zjawisk. Nie ma potrzeby podkreślać, że cały dalszy rozwój nauki potwierdził, i do dnia dzisiejszego potwierdza, prawdziwość tego stwierdzenia.

Następne istotne kroki w badaniu liczb pierwszych uczynił Leonhard Euler (1707–1783), matematyk i fizyk szwajcarski, przez większość życia pracujący w Berlinie i Petersburgu. Był pionierem w wielu obszarach obu tych nauk. Euler jest uważany za czołowego matematyka XVIII wieku i jednego z najwybitniejszych w całej historii matematyki.

W 1744 roku Euler udowodnił[2], że suma odwrotności wszystkich liczb pierwszych jest nieskończona, tzn.:

$$\sum_{p} \frac{1}{p} = \infty. \tag{1}$$

Zauważmy, że jest to stwierdzenie silniejsze od twierdzenia Euklidesa, gdyby bowiem liczb pierwszych było tylko skończenie wiele, to suma po lewej stronie powyższej równości miałaby skończoną wartość. W istocie

---

[1] Euklides, *Elementy*. Stwierdzenie 20 w Księdze IX.

[2] L. Euler, *Variae observationes circa series infinitas*. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 9(1744), 160–188. Opera Omnia, Series 1, Volume 14, p. 216–244, Lipsiae et Berolini, 1924.

twierdzenie to mówi więcej. Istnieją przecież szeregi nieskończone o skończonej sumie. Zatem ze wzoru (1) wynika, że składników – a więc liczb pierwszych – musi być „dużo”. Euler potrafił temu ostatniemu stwierdzeniu nadać formę ilościową.

Jak widać, Euler był w stanie dokonać istotnego postępu w badaniu liczb pierwszych, niemniej jednak w pracy[3] napisanej w 1747 roku, a opublikowanej w 1751 napisał następujące słowa, z których można odczytać jednocześnie fascynację, jak i bezsilność w zetknięciu z tym problemem.

> *Les mathématiciens ont tâché jusqu'ici en vain à découvrir un ordre quelconque dans la progression des nombres premiers, et on a lieu de croire, que c'est un mystère auquel l'esprit humain ne saurait jamais pénétrer. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à jeter les yeux sur les tables des nombres premiers, que quelques personnes se sont donné la peine de continuer au-delà de cent mille: et on s'apercevra d'abord qu'il ne règne aucun ordre ni règle.*[4]

Odkrycie wzoru (1) było wynikiem prac Eulera nad sumowalnością szeregów nieskończonych – był to temat gorących dyskusji między matematykami siedemnastego i osiemnastego stulecia. W roku 1644 matematyk włoski Pietro Mengoli (1626–1686) postawił[5] problem obliczenia sumy szeregu nieskończonego złożonego z odwrotności kwadratów liczb naturalnych, to znaczy szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

Problem ten zyskał potem nazwę *problemu bazylejskiego* dzięki Jakobowi Bernoulliemu (1655 –1705), słynnemu matematykowi z Bazylei, który w serii prac *Positiones de seriebus infinitis* z 1689 roku sformułował go w sposób ścisły, a następnie – do końca swojego życia – bezskutecznie

---

[3] L. Euler, *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*. Bibliothèque impartiale 3(1751), 10–31. Opera Omnia, Series 1, Volume 2, p. 241–253, Lipsiae et Berolini, 1915.

[4] Matematycy na próżno starali się odkryć jakiś porządek w ciągu liczb pierwszych, ale mamy prawo przypuszczać, że są pewne tajemnice, których umysł ludzki nigdy nie przeniknie. Aby się o tym przekonać, wystarczy przyjrzeć się tabelom liczb pierwszych, które staraniem kilku osób zostały sporządzone w zakresie do ponad stu tysięcy: można od razu zauważyć, że nie panuje tu żaden porządek czy reguła.

[5] P. Mengoli, *Novae quadrature arithmeticae, seu de additione fractionum*. Typografia Iacobi Montij, Bononiae, 1650

próbował rozwiązać. Problemem tym interesowało się wielu znanych matematyków tamtego okresu, między innymi Wallis, Leibniz, Stirling, de Moivre, Goldbach oraz Daniel Bernoulli. Stosunkowo łatwo jest uzasadnić stwierdzenie, że szereg powyższy jest zbieżny. Nietrudno zauważyć, że szereg zbiega do swojej sumy – oznaczmy ją przez $\zeta(2)$ – stosunkowo wolno. Mianowicie dla dowolnej liczby naturalnej N, suma pierwszych N wyrazów, to znaczy

$$1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{N^2},$$

różni się od $\zeta(2)$ o mniej niż $1/N$. Obliczając sumy częściowe, można rzecz jasna uzyskać przybliżone wartości $\zeta(2)$, ale z przytoczonego przed chwilą oszacowania błędu przybliżenia widać, że na tej drodze nie można zajść daleko. Na przykład obliczenie wartości $\zeta(2) = 1,644934\ldots$ z dokładnością do szóstego miejsca po przecinku wymaga zsumowania pierwszego miliona wyrazów szeregu.

Euler poświęcił badaniu problemu bazylejskiego kilka prac, a w 1735 roku – po niemal 100 latach od jego sformułowania – w końcu go rozstrzygnął[6], dowodząc, że

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Metoda dowodu Eulera nie od razu została uznana za w pełni poprawną. Wynikało to z faktu, że Euler używał argumentów, które w tamtych czasach były zbyt nowatorskie, a znalazły swoje pełne uzasadnienie dopiero w teorii Hadamarda funkcji skończonego rzędu, która powstała niemal 150 lat później. Zauważmy, że metoda Eulera pozwoliła mu na obliczenie wartości $\zeta(2n)$ dla wszystkich liczb naturalnych n:

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n},$$

gdzie B_n oznaczają tak zwane liczby Bernoulliego. Może warto tutaj na marginesie zauważyć, że wzory te legły u podstaw powstałej w dwu-

---

[6] L. Euler, *De summis serierum reciprocarum*. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 7(1740), 123–134. Opera Omnia, Series 1, Volume 14, p. 73–86, Lipsiae et Berolini, 1924.

dziestym wieku teorii tak zwanych p-adycznych funkcji dzeta, aktywnie rozwijanej dziedziny współczesnych badań[7].

Szereg występujący w problemie bazylejskim jest szczególnym przypadkiem (dla $s = 2$) sumy postaci

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \tag{2}$$

Pojawiła się ona (dla wymiernych wartości zmiennej s) we wspomnianej wcześniej serii prac *Positiones de seriebus infinitis* Jacoba Bernoulliego. Euler dokonał istotnego postępu w jej badaniu, publikując w 1744 roku pracę *Variae observationes circa series infinitas*[8]. Natomiast w rozprawie napisanej w 1749, a opublikowanej w 1768 roku[9] wykazał, że dla dla $s > 1$ zachodzi następująca równość, znana obecnie pod nazwą *iloczynu* lub *tożsamości Eulera*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \tag{3}$$

Iloczyn po prawej stronie jest iloczynem po wszystkich liczbach pierwszych, a więc jest równy

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^s}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{5^s}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{7^s}\right)^{-1} \cdots$$

Ciekawą rzeczą jest, że we wspomnianym dziele Euler uzasadnia następującą równość, w której $n > 1$ jest liczbą naturalną:

$$\frac{1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - \dots}{1 - 2^{-n} + 3^{-n} - \dots} = -\frac{(n-1)!(2^n - 1)\cos\frac{\pi n}{2}}{(2^{n-1} - 1)\pi^n}. \tag{4}$$

Jest ona o tyle ciekawa, że formalnie rzecz biorąc, nie ma sensu. Po jej lewej stronie w liczniku stoi bowiem szereg, który jest rozbieżny. Niemniej

---

7 Z podstawowymi pojęciami tej teorii można się zapoznać w monografii: N. Koblitz, *p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 58. Springer-Verlag, New York, 1984. xii+150 pp.

8 Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 9 (1744), 160–188. In Opera Omnia, Series 1, Volume 14, p. 216–244, Lipsiae et Berolini, 1924.

9 L. Euler, *Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques*, Mémoires de l'académie des sciences de Berlin 17(1768), 83–106. Opera Omnia, Series 1, Volume 15, p. 70–90, Lipsiae et Berolini, 1927.

jednak Euler potrafił nadać temu wyrażeniu ściśle określony sens, po raz kolejny wyprzedzając swoją epokę. Tym razem – stosując współczesną terminologię – antycypując powstanie teorii sumowalności. W istocie uzasadniając istnienie sumy szeregu nieskończonego, Euler korzystał z metody, którą obecnie nazywamy *sumowalnością w sensie Abela*; wrócimy do tego zagadnienia przy omawianiu równania funkcyjnego funkcji dzeta Riemanna.

Dalszych, doniosłych odkryć dotyczących liczb pierwszych dokonał Carl Friedrich Gauss (1777–1855), niemiecki matematyk, fizyk i astronom. Uważany jest za jednego z największych matematyków, przez sobie współczesnych określany był mianem „księcia matematyków" (*princeps mathematicorum*). W latach 1792–1793, jako kilkunastoletni młodzieniec, przeprowadził obliczenia numeryczne, próbując odkryć regularności w rozmieszczeniu liczb pierwszych mniejszych od trzech milionów na podstawie sporządzonych przez siebie tablic[10]. Jest jasne, że jedyną parzystą liczbą pierwszą jest liczba 2, ale poza tym liczby pierwsze pojawiają się w ciągu liczb naturalnych w sposób dość przypadkowy. W szczególności nie ma prostego wzoru na n-tą liczbę pierwszą. Gauss zauważył, że mimo pozornej chaotyczności w ich rozmieszczeniu, istnieją prawa, którym one podlegają. W szczególności zauważył, że prawdopodobieństwo tego, żeby losowo wybrana liczba naturalna była liczbą pierwszą jest w przybliżeniu równe odwrotności logarytmu naturalnego z tej liczby. Oznaczając przez $\mathbb{P}$ zbiór liczb pierwszych, a przez P funkcję prawdopodobieństwa (miarę probabilistyczną), możemy to stwierdzenie zapisać symbolicznie w następujący sposób[11]:

$$\mathrm{P}(n \in \mathbb{P}) \cong \frac{1}{\log n}. \tag{5}$$

Przy badaniu liczb pierwszych wygodnie jest posługiwać się funkcją liczącą $\pi(x)$, która dla liczby dodatniej x przyjmuje wartość równą liczbie

---

10 Gauss nigdy nie opublikował swoich tablic. Wspomina o nich w cytowanym w dalszej części tego artykułu liście do Enckego. Znajdują się one w wydanych po śmierci Gaussa pracach zebranych, por. C.F. Gauss, *Tafel der Frequenz der Primzahlen*. Werke, II, 436–442, Göttingen, 1872.

11 Warto tu podkreślić, że dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej x, symbol $\log x$ oznacza logarytm naturalny (a nie dziesiętny) liczby x. Oznaczenie to będzie konsekwentnie stosowane w całej niniejszej pracy.

liczb pierwszych p mniejszych lub równych x:

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1.$$

Gauss zauważył, że funkcję $\pi(x)$ cechuje zaskakująca regularność. Dla „dużych" wartości argumentu x przyjmuje ona wartość równą w przybliżeniu sumie odwrotności logarytmów kolejnych liczb naturalnych z zakresu od 1 do x, tzn.

$$\pi(x) \sim \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \ldots + \frac{1}{\log N}, \tag{6}$$

gdzie $N = [x]$ oznacza część całkowitą liczby x, to znaczy największą liczbę naturalną mniejszą lub równą x. Występujący w powyższym wzorze symbol „$\sim$" oznacza tak zwaną asymptotyczną równość. Ogólnie, dwie wielkości $f(x)$ oraz $g(x)$, zależne od parametru rzeczywistego x i przyjmujące wartości niezerowe, nazywamy *równymi asymptotycznie*, gdy ich stosunek $f(x)/g(x)$ dąży do 1 przy x dążącym do nieskończoności.

Suma po prawej stronie wzoru (6) rośnie do nieskończoności tak, jak $x/\log x$, a więc

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \tag{7}$$

lub równoważnie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1. \tag{8}$$

Z grubsza wszystkie powyższe wzory stwierdzają, że liczb pierwszych mniejszych lub równych x jest w przybliżeniu $x/\log x$. Ponieważ liczb naturalnych $n \leqslant x$ jest dokładnie tyle, ile wynosi część całkowita z x, a więc w przybliżeniu x, prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana liczba naturalna $n \leqslant x$ będzie liczbą pierwszą, jest równe

$$\frac{\pi(x)}{[x]} \sim \frac{1}{\log x},$$

co jest całkowicie zgodne z (5).

Należy przy tym podkreślić, że odkrycia Gaussa miały charakter czysto fenomenologiczny i nie były twierdzeniami matematycznymi w ścisłym rozumieniu tego słowa. Były to raczej przypuszczenia oparte na obserwacjach i to – dodajmy od razu – dokonanych w stosunkowo małym zakresie. Ponieważ jednak w tamtych czasach nie istniały komputery i obliczenia te należało wykonać ręcznie, wymagało to sporej cierpliwości. Ale istota pracy Gaussa nie polegała na przeprowadzeniu rachunków i sporządzeniu tablicy liczb pierwszych mniejszych od 3 000 000, lecz na interpretacji uzyskanego materiału empirycznego. W szczególności wzór (7) zyskał status hipotezy, zwanej *hipotezą o liczbach pierwszych*. Zainspirowała ona wielu wybitnych matematyków, była jedną z motywacji przyszłej pracy Riemanna oraz doprowadziła do sformułowania słynnej Hipotezy Riemanna, o czym powiemy w dalszej części tego opracowania.

Liczby pierwsze fascynowały Gaussa przez całe życie. Nie udało mu się wprawdzie udowodnić w sposób ścisły swoich przypuszczeń na ich temat, ale – już w wieku dojrzałym – nadał im bardziej precyzyjną postać. W liście do znanego astronoma Enckego[12] napisanym w roku 1849 Gauss[13] zauważył, że sumę stojącą po prawej stronie wzoru (6) można z bardzo dobrym przybliżeniem zastąpić przez pewną całkę, zwaną *logarytmem całkowym*

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{du}{\log u} \qquad (x > 1).$$

Uważny Czytelnik zwróci uwagę w tym momencie na pewną osobliwość występującą w powyższej definicji, a mianowicie na nieokreśloność funkcji podcałkowej dla $u = 1$ (zero w mianowniku). Śpieszę uspokoić, że jest to problem, z którym można sobie łatwo poradzić, rozumiejąc odpowiednio całkę, ale nie będziemy się nad tym dłużej zatrzymywać. Można udowodnić, że przy x dążącym do nieskończoności

$$\mathrm{li}(x) = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\log n} + c_0 + O\left(\frac{1}{x \log x}\right),$$

gdzie $c_0 = 0.207047\ldots$ jest pewną stałą numeryczną.

---

[12] Johann Franz Encke (1791–1865) – astronom niemiecki. Jego imię nosi jedna z komet (*kometa Enckego*), odkrył tzw. *przerwę Enckego* w zewnętrznym pierścieniu Saturna, określił wartość paralaksy słonecznej, a także opracował metody obliczania orbit komet krótkookresowych i planetoid oraz orbit gwiazd podwójnych.

[13] Angielskie tłumaczenie listu stanowi załącznik do pracy L.J. Goldstein, *A history of the prime number theorem.* American Mathematical Monthly, 80(6)(1973), 599–615.

Powyższy wzór jest przykładem tak zwanej formuły asymptotycznej, a więc wzoru, który pozwala na przybliżenie jakiejś wielkości przez prostsze wyrażenie zwane *członem głównym*. W naszym konkretnym przypadku wielkością przybliżaną jest li(x), a członem głównym jest suma

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\log n} + c_0.$$

Ostatni składnik to tak zwany *człon resztowy*. Użyty tu symbol

$$O\left(\frac{1}{x \log x}\right)$$

oznacza, że przy zastąpieniu li(x) przybliżeniem, które daje człon główny, popełniamy błąd, którego wartość bezwzględna nie przekracza

$$C\frac{1}{x \log x}$$

dla pewnej stałej dodatniej C oraz wszystkich liczb $x \geqslant x_0$. Ogólnie, dla dowolnych wartości $f(x)$ oraz $g(x) > 0$, zależnych od parametru rzeczywistego $x \geqslant x_0$, zapis

$$f(x) = O(g(x))$$

oznacza, że istnieje stała dodatnia C taka, że dla wszystkich $x \geqslant x_0$ zachodzi nierówność

$$|f(x)| \leqslant Cg(x).$$

Z formułami asymptotycznymi będziemy mieć wielokrotnie do czynienia w dalszej części tego opracowania.

Zauważmy, że przy x dążącym do nieskończoności oraz przy dowolnym ustalonym k będącym liczbą naturalną mamy

$$\mathrm{li}(x) = \frac{x}{\log x} + 1!\frac{x}{\log^2 x} + 2!\frac{x}{\log^3 x} \ldots + (k-1)!\frac{x}{\log^k x} + O\left(\frac{x}{\log^{k+1} x}\right), \quad (9)$$

a więc $x/\log x$ jest pierwszym przybliżeniem logarytmu całkowego. Nie dziwi zatem fakt, iż li(x) dokładniej przybliża $\pi(x)$ niż $x/\log x$. W istocie formuły (7) oraz

$$\pi(x) \sim \mathrm{li}(x) \quad (10)$$

są równoważne. Różnica między nimi polega na jakości przybliżenia.

Korzystając z komputera, można bez trudu sprawdzić, że formuła ta poprawnie opisuje zachowanie się funkcji liczącej liczby pierwsze także dla wartości zmiennej x znacznie wykraczających poza przedział badany przez Gaussa. Pokazuje to następujące zestawienie:

x	$\pi(x)$	$\mathrm{li}(x)$	$\mathrm{li}(x) - \pi(x)$
10	4	6.16	2.16
10^2	25	30.1	5.1
10^3	168	177.6	9.6
10^4	1229	1246.1	17.1
10^5	9592	9629.8	37.8
10^6	78498	78627.5	129.5
10^7	664579	664918.4	339.4
10^8	5761455	5762209.4	754.4
10^9	50847534	50849235.0	1700.9

Opierając się na powyższych danych, można poczynić śmielsze przypuszczenia od tych, które zaproponował Gauss. Widać na przykład, że dla wartości podanych w tabeli mamy zawsze $\pi(x) < \mathrm{li}(x)$. Gdybyśmy jednak dali się ponieść fantazji i przyjęli ten fakt eksperymentalny jako roboczą hipotezę, ponieślibyśmy spektakularną klęskę. J.E. Littlewood[14] wykazał[15], że różnica

$$\pi(x) - \mathrm{li}(x)$$

zmienia znak nieskończenie wiele razy przy x dążącym do nieskończoności. Tak więc logarytm całkowy przybliża wartość $\pi(x)$ nieskończenie wiele razy z nadmiarem i nieskończenie wiele razy z niedomiarem. Co więcej, odchylenia te przekraczają co do wartości bezwzględnej wartość

$$A\frac{\sqrt{x}\log\log\log x}{\log x} \tag{11}$$

dla pewnej liczby dodatniej A. Ciekawe jest, że w chwili obecnej (2018) nie znamy żadnej wartości x_0, dla której $\pi(x_0) > \mathrm{li}(x_0)$. Przypuszcza się, że najmniejsza taka wartość jest bardzo duża i znajduje się w okolicach

14 John Edensor Littlewood (1885–1977) – matematyk angielski.

15 J.E. Littlewood, *Sur la distribution des nombres premiers*. C.R. Acad. Sci. Paris 158(1914), 1869–1872.

10^{316}, a więc daleko poza zasięgiem możliwości istniejących komputerów. Z ostatnich uwag można wysnuć wniosek, że eksperymenty numeryczne mogą być użyteczne przy badaniu liczb pierwszych, ale nie należy im bezkrytycznie ufać.

Warto w tym momencie wspomnieć o dwóch pracach[16] francuskiego matematyka Legendre'a[17], w których pojawiły się w formie przypuszczeń stwierdzenia bliskie hipotezie o liczbach pierwszych. W pierwszej z nich Legendre wysunął hipotezę, że $\pi(x)$ jest w przybliżeniu równe

$$\frac{x}{A\log x + B},$$

gdzie A i B są pewnymi stałymi. W drugiej pracy przypuszczenie to zostało zmodyfikowane poprzez zastąpienie powyższego przybliżenia przez

$$\frac{x}{\log x + A(x)},$$

gdzie $A(x)$ jest funkcją parametru x dążącą do 1.08366 przy x dążącym do nieskończoności. Jakkolwiek Gauss był znacznie bliższy prawdy niż Legendre, prace tego ostatniego są godne uwagi ze względu na to, że ukazały się drukiem i w związku z tym od razu weszły w obieg literatury naukowej. We wspomnianym liście do Enckego, Gauss poświęca sporo miejsca porównaniu swoich odkryć z pracami Legendre'a.

MEMORIAŁ RIEMANNA

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) to jeden z najwybitniejszych matematyków wszech czasów. Oprócz matematyki zajmował się również fizyką, zarówno teoretyczną, jak i eksperymentalną, oraz filozofią przyrody. Był profesorem Uniwersytetu w Getyndze, członkiem korespondentem Berlińskiej Akademii Nauk (1859) i Royal Society (1866).

---

[16] A.-M. Legendre, *Essai sur la théorie des Nombres*, 1st ed. Paris 1798, p. 19; *Essai sur la Théorie des Nombres*, 2nd ed., Paris 1808, p. 394.

[17] Adrien-Marie Legendre (1752–1833) – członek Francuskiej Akademii Nauk, autor prac ze statystyki, teorii liczb, algebry, analizy matematycznej i geodezji.

Żył zaledwie 40 lat, a jego dorobek publikacyjny jest ilościowo dość skromny i mieści się w jednym tomie dzieł zebranych[18]. Natomiast jakość prac Riemanna jest imponująca. Każda z nich wniosła istotny wkład w rozwój działu matematyki, którego dotyczyła. Tylko jedna z nich poświęcona jest problemom teorii liczb, a mianowicie liczbom pierwszym. Liczy zaledwie osiem stron, ale treści w niej zawarte wyryły trwałe piętno na rozwoju całej matematyki, zmieniając bieg jej historii. Głównym obiektem badań w Memoriale Riemanna[19] są analityczne własności funkcji $\zeta(s)$, zwanej obecnie *funkcją dzeta Riemanna*, rozważanej w pełnej ogólności, to znaczy jako funkcja zmiennej zespolonej. Jednak głównym celem pracy było zbadanie rozmieszczenia liczb pierwszych; funkcja dzeta była tylko środkiem do tego. Jak widzieliśmy wcześniej $\zeta(s)$, pojawiła się już w pracach Jacoba Bernoulliego i Leonarda Eulera, ale rozważana była wyłącznie jak funkcja argumentu rzeczywistego, co w drastyczny sposób ograniczało zakres możliwych zastosowań. Przejście do dziedziny zespolonej otworzyło nowe perspektywy. Punktem wyjścia pracy Riemanna jest definicja

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

formalnie tożsama z (2) wraz z tożsamością Eulera (3):

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

z jedną, ale zasadniczą różnicą: u Riemanna s oznacza dowolną liczbę zespoloną o części rzeczywistej większej od 1.

Warto teraz przyjąć pewną konwencję dotyczącą zapisu liczb zespolonych, wprowadzoną zresztą przez Riemanna i od tego czasu powszechnie stosowaną w analitycznej teorii liczb. Mianowicie od tego momentu liczby zespolone będziemy zapisywać w postaci

$$s = \sigma + it,$$

---

[18] B. Riemann, *Gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge.* Nach der Ausgabe von Heinrich Weber und Richard Dedekind neu herausgegeben von Raghavan Narasimhan. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1862; Springer-Verlag, Berlin (1990).

[19] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*. Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859, 671–680.

gdzie σ i t są liczbami rzeczywistymi (zwanymi odpowiednio częścią rzeczywistą i częścią urojoną liczby s). Równanie $\sigma > 1$ określa półpłaszczyznę (otwartą) składającą się ze wszystkich liczb zespolonych o części rzeczywistej większej od 1. Jest to tak zwana półpłaszczyzna zbieżności bezwzględnej funkcji dzeta. W tym obszarze $\zeta(s)$ jest zdefiniowana jako suma dobrze zbieżnego szeregu i w związku z tym stosunkowo łatwo tam jest badać jej własności. Również iloczyn Eulera jest w tej półpłaszczyźnie zbieżny bezwzględnie. W obu przypadkach zbieżność jest niemal jednostajna i zgodnie z ogólną teorią każde z wyrażeń (tzn. zarówno szereg, jak i iloczyn) definiują funkcję holomorficzną, oczywiście w obu przypadkach tę samą. W szczególności tożsamość Eulera (3) zachodzi dla wszystkich $\sigma > 1$.

Dla pozostałych liczb zespolonych s funkcję $\zeta(s)$ definiujemy poprzez przedłużenie analityczne. Okazuje się przy tym, jak wykazał Riemann, że $\zeta(s)$ jest funkcją holomorficzną dla wszystkich wartości zespolonych s, z wyjątkiem punktu $s = 1$, gdzie ma tak zwany biegun pojedynczy (z residuum równym 1). Czytelnik, dla którego terminy, które się tu pojawiły, brzmią obco i niezrozumiale, może je rozumieć jako synonim wyrażenia „funkcja o bardzo regularnych własnościach". Nie znaczy to wcale, że poza półpłaszczyzną $\sigma > 1$ własności funkcji dzeta łatwo poddają się badaniu. Niektóre z nich nadal opierają się wysiłkom matematyków, na czele ze słynną Hipotezą Riemanna, o której będzie mowa obszerniej za chwilę. Jest rzeczą oczywistą, że Riemann wiedział znacznie więcej na temat funkcji dzeta od tego, co umieścił w swojej pracy. Dowody w niej zawarte są zaledwie z grubsza naszkicowane lub też zupełnie pominięte. Zostały one w znakomitej większości uzupełnione staraniem innych matematyków, jednak już po śmierci Riemanna. Dzisiaj na temat funkcji dzeta wiemy bardzo dużo, ale – dodajmy od razu – nie tyle, ile byśmy chcieli. Jej własnościom poświęconych jest kilka klasycznych monografii[20] oraz olbrzymia i trudna do oszacowania liczba prac specjalistycznych.

---

[20] Por. np. E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*. 2nd ed. revised by D.R. Heath-Brown, New York: The Clarendon Press, Oxford University Press, 1986; H.M. Edwards, *Riemann's zeta function,* Pure and Applied Mathematics 58, New York-London: Academic Press, 1974; A. Ivić, *The Riemann zeta function*. New York: Wiley-Interscience, 1985; S.J. Patterson, *An introduction to the theory of the Riemann zeta-function.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics 14, Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

Memoriał Riemanna rozpoczął, trwający zresztą do dnia dzisiejszego, okres systematycznego badania analitycznych własności funkcji dzeta oraz jej arytmetycznych zastosowań. Można przyjąć, że wraz z pojawieniem się pracy Riemanna została stworzona nowa dziedzina badań zwana *analityczną teorią liczb*. Samego Riemanna należy uznać za jej prekursora, chociaż, jak widzieliśmy wcześniej, praca Riemanna z pewnością była inspirowana o ponad wiek wcześniejszymi odkryciami Eulera.

Oprócz ustalenia przedłużenia analitycznego na całą płaszczyznę zespoloną z usuniętym punktem $s = 1$, Riemann wykazał, że funkcja $\zeta(s)$ spełnia następujące równanie funkcyjne

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s), \tag{12}$$

gdzie $\Gamma(s)$ oznacza tak zwaną funkcję gamma Eulera. Jest to jedna z najważniejszych funkcji nieelementarnych, której definicję pomijam, aktórej własności są dość dobrze poznane. Wygodnie jest wprowadzić następującą funkcję zmiennej zespolonej s

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s). \tag{13}$$

Ze znanych już nam własności funkcji dzeta wnosimy, że jest to funkcja całkowita (holomorficzna na całej płaszczyźnie zespolonej), a wzór (12) można zapisać w następujący elegancki sposób

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Równanie funkcyjne mówi nam, że własności funkcji dzeta w półpłaszczyźnie $\sigma < 0$ można odczytać z własności w półpłaszczyźnie $\sigma > 1$, a więc stosunkowo łatwo. Pozostaje pas pionowy

$$0 \leqslant \sigma \leqslant 1,$$

zwany *pasem krytycznym*. Zasadnicza część teorii funkcji dzeta dotyczy właśnie jej własności w pasie krytycznym, a w istocie (ze względu na równanie funkcyjne) w prawej połowie tegoż pasa: $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1$. Szczególne miejsce w teorii zajmuje tak zwana *prosta krytyczna* $\sigma = 1/2$, będąca osią symetrii pasa krytycznego.

Ponieważ, jak już powiedziano, funkcja dzeta jest dobrze określona dla wszystkich liczb zespolonych $s \neq 1$, wyrażenia postaci $\zeta(1-n)$ mają ściśle określony sens dla wszystkich liczb naturalnych n. Jest to zasadnicza różnica (i postęp) w porównaniu z sytuacją, z którą musiał zmagać się Euler. Zauważmy, że szereg

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - \dots$$

występujący w liczniku po lewej stronie wzoru (4) to nic innego jak

$$(2^{n-1} - 1)\zeta(1 - n).$$

Likwiduje to „dziwność" wzoru Eulera, a stosowaną przez niego metodę sumacyjną Abela zastępuje przedłużeniem analitycznym. Analizując w ten sposób wzór (4), dochodzi się do wniosku, że jest on szczególnym przypadkiem równania funkcyjnego (12).

Każdą liczbę zespoloną ω, dla której $\zeta(\omega) = 0$ nazywamy *zerem* funkcji dzeta Riemanna. Bezpośrednio z tożsamości Eulera (3) widać, że $\zeta(s) \neq 0$ dla $\sigma > 1$, a więc w tej półpłaszczyźnie nie ma żadnych zer. Z równania funkcyjnego (12) oraz ze znanych własności funkcji gamma Eulera wynika, że

$$\zeta(-2n) = 0 \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Zatem ujemne parzyste liczby całkowite są zerami funkcji dzeta; są to tak zwane *zera trywialne*. Oprócz nich $\zeta(s)$ posiada nieskończenie wiele zer leżących w pasie krytycznym

$$\rho = \beta + i\gamma \qquad (0 \leqslant \beta \leqslant 1),$$

zwanych *zerami nietrywialnymi*, które odgrywają pierwszoplanową rolę w całej teorii.

Warto na chwilę zatrzymać się w tym miejscu i wyjaśnić, dlaczego tak jest. Otóż z ogólnej teorii funkcji zmiennej zespolonej[21] wynika, że dla dowolnej liczby zespolonej s zachodzi następująca równość

$$\xi(s) = \frac{1}{2} e^{As} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}},$$

gdzie A jest pewną stałą[22], natomiast ρ przebiega wszystkie nietrywialne zera funkcji $\zeta(s)$. Widać stąd, że położenie zer w zupełności determinuje zachowanie się funkcji dzeta. Z drugiej strony funkcję dzeta możemy

[21] Chodzi tu o teorię Hadamarda funkcji całkowitych skończonego rzędu.

[22] Można wykazać, że $A = \log 2 + \frac{1}{2} \log \pi - 1 - \frac{1}{2}\gamma$, gdzie $\gamma = 0.577215664\dots$ jest tak zwaną stałą Eulera.

przedstawić w postaci iloczynu Eulera (3). Można więc powtórzyć powyższe stwierdzenie o roli zer w odniesieniu do liczb pierwszych: położenie liczb pierwszych w zupełności determinuje zachowanie się funkcji dzeta. Mamy więc oczywistą dualność między zerami funkcji dzeta a liczbami pierwszymi, co powoduje, że w pewnym sensie badanie tych obiektów jest równoważne. Zera są obiektami znacznie bardziej enigmatycznymi niż liczby pierwsze – już samo zagadnienie ich istnienia wymaga dowodu – niemniej jednak, dość paradoksalnie, są w wielu aspektach łatwiejsze do zbadania. Wynika to z faktu, że przy ich badaniu mamy do dyspozycji bogaty arsenał środków analizy zespolonej. Nieprzypadkowo memoriał Riemanna pojawił się w okresie rozkwitu teorii funkcji zmiennej zespolonej. Na przestrzeni ponad stu lat, które dzielą badania Eulera problemu bazylejskiego i pracę Riemanna, matematycy stworzyli nowe potężne narzędzie, które pozwoliło na rozwój idei, obecnych już w pracach genialnego Szwajcara. Pojawienie się takiej możliwości zapewne legło u podstaw zainteresowania się Riemanna liczbami pierwszymi. Była to jego główna motywacja, której zresztą dał wyraz w tytule swojej pracy, który w tłumaczeniu brzmi: *O liczbie liczb pierwszych poniżej danej granicy*. Jednoznacznie więc wskazuje on funkcję liczącą liczby pierwsze $\pi(x)$ jako główny przedmiot badań.

Z równania funkcyjnego (12) wynika, że zera nietrywialne leżą symetrycznie względem prostej rzeczywistej (zasada odbicia Schwarza) oraz prostej krytycznej. Inaczej mówiąc, jeśli $\rho = \beta + i\gamma$ jest zerem nietrywialnym, to również liczby $\beta - i\gamma$, $(1-\beta) + i\gamma$ oraz $(1-\beta) - i\gamma$ są zerami nietrywialnymi. Z ogólnej teorii funkcji zmiennej zespolonej wynika, że w każdym prostokącie o wierzchołkach $0, 1, 1+iT$ oraz iT, gdzie T oznacza dowolną dodatnią liczbę rzeczywistą, liczba zer jest skończona; oznaczmy ją przez $N(T)$. Ponieważ zer jest nieskończenie wiele, więc wielkość ta rośnie do nieskończoności wraz z T dążącym do nieskończoności. Ale jak szybko? Riemann podał następującą formułę asymptotyczną[23]

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi e} + O(\log T). \tag{14}$$

Jak powiedziano wcześniej, główna motywacja pracy Riemanna to badanie funkcji $\pi(x)$ metodami analitycznymi. Wynikiem tych dociekań

---

[23] Ścisły jej dowód przedstawił von Mangoldt w 1905 roku w pracy *Zur Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Funktion* $\xi(t)$. Math. Ann. 60(1905), 1–19.

była następująca formuła w sposób jawny łącząca liczby pierwsze i nietrywialne zera funkcji dzeta

$$\begin{aligned}\pi(x)+\frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) &+ \frac{1}{3}\pi(x^{1/3})+\ldots\\ &= \mathrm{li}(x)-\sum_{\rho}\mathrm{li}(x^{\rho})-\log 2+\int_x^{\infty}\frac{dt}{t(t^2-1)\log t}.\end{aligned}$$

Zauważmy, że lewa strona ma charakter czysto arytmetyczny. Występująca tu funkcja „liczy" liczby pierwsze z odpowiednimi wagami. Dokładniej, liczby pierwsze z zakresu $\sqrt{x} < p \leqslant x$ liczone są z wagą 1, liczby pierwsze z zakresu $x^{1/3} < p \leqslant \sqrt{x}$ z wagą $3/2$ i tak dalej. Prawa strona ma charakter wybitnie analityczny, w istocie występujące tu składniki związane są z osobliwością funkcji dzeta w punkcie $s = 1$ oraz z jej zerami, zarówno trywialnymi, jak i nietrywialnymi. Wkład zer nietrywialnych jest widoczny *explicite* w postaci sumy, natomiast wkład zer trywialnych ukryty jest w całce występującej po prawej stronie formuły. Chwila zastanowienia prowadzi do następującej idei. Stosunkowo łatwo jest wykazać, że po lewej stronie największym składnikiem jest $\pi(x)$. Trudniejsza sprawa jest ze stroną prawą. Riemann – słusznie, jak się później okazało – przypuszczał, że jest to $\mathrm{li}(x)$. Ta obserwacja prowadzi do wniosku, że $\pi(x) \sim \mathrm{li}(x)$, to znaczy do dowodu hipotezy o liczbach pierwszych. Można wykazać, że do dowodu tej ostatniej wystarczy informacja, iż $\beta < 1$ dla dowolnego nietrywialnego zera funkcji dzeta Riemanna. Staje się więc jasne, że informacja o położeniu nietrywialnych zer wewnątrz pasa krytycznego ma podstawowe znaczenie w teorii liczb pierwszych. Wiedząc o występujących symetriach, Riemann wysunął następujące śmiałe przypuszczenie, znane obecnie pod nazwą *Hipoteza Riemanna*:

Wszystkie nietrywialne zera funkcji dzeta leżą na prostej krytycznej:

$$\rho = \frac{1}{2} + i\gamma.$$

W ciągu ponad 150 lat, które upłynęły od jej postawienia, matematycy zdali sobie sprawę z doniosłych konsekwencji, które ona implikuje. W chwili obecnej Hipoteza Riemanna uważana jest – zupełnie słusznie – za najważniejszy otwarty problem matematyczny. Jest to jeden z tak zwanych *Problemów Millenijnych*, siedmiu zagadnień ogłoszonych przez Instytut Matematyczny Claya w 2000 roku; za rozwiązanie każdego z nich wyznaczono milion dolarów nagrody.

TWIERDZENIE O LICZBACH PIERWSZYCH

Hipotezę o liczbach pierwszych (6) – (8) udowodnili (niezależnie od siebie) Charles-Jean de la Vallée Poussin[24] oraz Jacques Hadamard[25] w roku 1896, a więc niecałe czterdzieści lat po opublikowaniu pracy Riemanna[26]. Od tej pory wzory te noszą nazwę *Twierdzenia o liczbach pierwszych.* W istocie wypełnili oni dokładnie program naszkicowany przez Riemanna, otrzymując twierdzenie o liczbach pierwszych jako wniosek z faktu, że części rzeczywiste nietrywialnych zer są mniejsze od 1, inaczej mówiąc, że

$$\zeta(1 + it) \neq 0 \qquad (-\infty < t < \infty).$$

De la Vallée Poussin dodatkowo wyznaczył obszar leżący wewnątrz pasa krytycznego i zawierający prostą pionową $s = 1 + it$, który jest wolny od zer funkcji dzeta. W konsekwencji wykazał, że istnieje stała dodatnia c_0 taka, że

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x \exp(-c_0 \sqrt{\log x})), \tag{15}$$

co jest nieco silniejszą wersją wzoru (10). Udowodnienie Twierdzenia o liczbach pierwszych było ogromnym osiągnięciem, które na trwałe wpisało się do kanonu największych dokonań matematyki.

Warto tutaj nadmienić, że przez długie lata uważano, że Twierdzenia o liczbach pierwszych nie da się udowodnić bez użycia środków analizy zespolonej (lub jej równoważnych). Dopiero w 1949 roku Atle Selberg[27,28] i P. Erdős[29,30] znaleźli całkowicie elementarny dowód, to znaczy dowód niewymagający użycia zaawansowanych pojęć analizy matematycznej.

24 Charles-Jean de la Vallée Poussin (1866–1962) – matematyk belgijski.

25 Jacques Hadamard (1865–1963) – matematyk francuski.

26 J. Hadamard, *Sur la distribution des zéros de la function ζ(s) et ses conséquences arithmétique*. Bull. Soc. Math. France 24 (1896), 199–220; Ch.-J. de la Vallée Poussin, *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers*. Ann. Soc. Sci. Bruxelles 20 (1896), 183–256.

27 Atle Selberg (1917–2007) – matematyk norweski, Medal Fieldsa w 1950 r.

28 A. Selberg, *An elementary proof of the prime-number theorem.* Ann. of Math. 50(2)(1949), 305–313.

29 Paul Erdős (1913–1996) – matematyk węgierski.

30 P. Erdős, *On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 35(1949), 374–384.

Należy tutaj zaznaczyć, że termin „elementarny” nie jest synonimem terminu „łatwy”. W istocie rozumowanie Erdősa-Selberga do łatwych nie należy, a podejście analityczne, mimo zastosowania bardziej zaawansowanych środków, jest prostsze.

WARUNKI RÓWNOWAŻNE HIPOTEZIE RIEMANNA

Znanych jest bardzo dużo stwierdzeń równoważnych Hipotezie Riemanna opartych na istotnie różnych ideach[31], wiele z nich ma liczne warianty. To sprawia, że liczba możliwych sformułowań Hipotezy jest nieograniczona. Oto kilka przykładów.

Hipoteza jest stwierdzeniem dotyczącym funkcji zmiennej zespolonej, w konsekwencji najbardziej oczywiste są jej przeformułowania w języku tej teorii. Oznaczmy przez $\mu(n)$ tak zwaną *funkcję Möbiusa*, jedną z najważniejszych funkcji arytmetycznych badanych w teorii liczb. Zdefiniowana jest ona wzorem

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } n = 1, \\ (-1)^r & \text{gdy } n \text{ jest iloczynem } r \text{ różnych liczb pierwszych,} \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Dla $\sigma > 1$ zachodzi następujący wzór

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Hipoteza Riemanna jest w sposób oczywisty równoważna stwierdzeniu, że funkcja $1/\zeta(s)$ jest holomorficzna dla $\sigma > 1/2$. To z kolei jest równoważne temu, że powyższy szereg jest zbieżny w tej półpłaszczyźnie.

Inny warunek konieczny i dostateczny dla prawdziwości Hipotezy Riemanna jest następujący[32]

$$\zeta'(s) \neq 0 \quad \text{dla} \quad 0 < \sigma < 1/2,$$

31 Por. Kevin Broughan, *Equivalents of the Riemann Hypothesis, vol. 1 and 2.*, Cambridge: Cambridge University Press, 2017.

32 Występujący tu symbol $\zeta'(s)$ oznacza pochodną (zespoloną) funkcji dzeta Riemanna.

co udowodnił Andreas Speiser[33]. Natomiast Jeffrey C. Lagarias[34] wykazał, że jest nim również to, iż[35]

$$\Re\left(\frac{\xi'}{\xi}(s)\right) > 0 \quad \text{dla} \quad \sigma > \frac{1}{2}.$$

Całą serię warunków równoważnych można sformułować w języku arytmetyki. Oczywiście podstawowy z nich dotyczy liczb pierwszych: Hipoteza Riemanna jest równoważna silnemu oszacowaniu wielkości członu resztowego w Twierdzeniu o liczbach pierwszych:

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(\sqrt{x}\log x). \tag{16}$$

Z cytowanego wcześniej twierdzenia Littlewooda (11) wynika, że tego oszacowania nie można już bardziej, w sposób znaczący poprawić. Podobne warunki równoważne można formułować, używając innych funkcji arytmetycznych. Dla przykładu Hipoteza Riemanna jest równoważna następującemu oszacowaniu sumy wartości funkcji Möbiusa: dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\right| \leqslant x^{1/2+\varepsilon} \quad (x \geqslant x_0(\varepsilon)). \tag{17}$$

Powyższe stwierdzenie można przeformułować w języku teorii macierzy w sposób następujący. Dla ustalonej liczby naturalnej n definiujemy *macierz Redheffera* $R_n = [R_n(i,j)]$ stopnia n, określając jej wyrazy wzorem

$$R_n(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } j = 1 \text{ lub } i|j, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Można wykazać, że

$$\det R_n = \sum_{k=1}^{n}\mu(n).$$

Wnioskujemy stąd, że Hipoteza Riemanna jest równoważna stwierdzeniu, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\det R_n \leqslant n^{1/2+\varepsilon} \quad (n \geqslant n_0(\varepsilon))$$

---

[33] A. Speiser, *Geometrisches zur Riemannschen Zetafunktion.* Math. Ann. 110(1935), no. 1, 514–521.

[34] J.C. Lagarias, *On a positivity property of the Riemann ξ-function.* Acta Arith. 89(3)(1999), 217–234.

[35] Dla dowolnej liczby zespolonej z, symbol $\Re(z)$ oznacza jej część rzeczywistą.

(Raymond M. Redheffer[36].) Fakt ten można również wyrazić w terminach teorii grafów[37].

Wariantem poprzedniego warunku równoważnego jest następujący, sformułowany za pomocą tak zwanej *funkcji Liouville'a*. Definiujemy ją wzorem

$$\lambda(n) = (-1)^{\omega(n)},$$

gdzie $\omega(n)$ oznacza liczbę różnych dzielników pierwszych liczby n. Podobnie jak w przypadku funkcji Möbiusa, Hipoteza Riemanna jest równoważna temu, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\left|\sum_{n \leqslant x} \lambda(n)\right| \leqslant x^{1/2+\varepsilon} \quad (x \geqslant x_0(\varepsilon)).$$

Zupełnie inny warunek równoważny, używający funkcji $\sigma(n)$ równej sumie dzielników naturalnych liczby n, podał Guy Robin[38]:

$$HR \iff \sigma(n) < e^{\gamma} n \log\log n \ \text{ dla } \ n \geqslant 5041.$$

Zwraca uwagę elementarność tego warunku.

Zaskakujące jest to, że Hipotezę Riemanna można sformułować, używając zwykłych ułamków. Możliwość taką opisał Jérôme Franel[39] w 1924 roku. *Ciągiem Fareya* rzędu n nazywamy ciąg rosnący liczb wymiernych (ułamków) postaci a/q, gdzie $0 \leqslant a \leqslant q \leqslant n$ oraz a i q są względnie pierwsze. Zapiszmy taki ciąg następująco

$$\eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_m.$$

Hipoteza Riemanna jest równoważna stwierdzeniu, że ułamki te ułożone są „bardzo regularnie". Dokładniej,

$$\sum_{j=1}^{m} \left|\eta_j - \frac{j}{m}\right|^2 \leqslant n^{-1+\varepsilon} \quad (n \geqslant n_0(\varepsilon)).$$

---

36 R.M. Redheffer, *Eine explizit lösbare optimierungsaufgabe.* Internat. Schriftenreihe Numer. Math. 142(1977), 141–152.

37 Por. W. Barratt, R.W. Forcade, A.D. Pollington, *On the spectral radius of a (0,1) matrix related to Mertens' function*. Linear Algebra Appl. 107(1988), 151–159.

38 G. Robin, *Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et Hypothèse de Riemann.* J. Math. Pures Appl. (9) 63(1984), no. 2, 187–213.

39 J. Franel, *Les suites de Farey et le problème des nombres premieres.* Göttinger Nachrichten (1924), 198–201.

Istnieje cała grupa warunków równoważnych Hipotezie Riemanna, które postulują stały znak pewnych wyrażeń. Do tej grupy należy tak zwane *kryterium Li*[40], które stwierdza, że Hipoteza jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{\rho}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^{n}\right) \geqslant 0 \ \text{ dla } \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Inny warunek równoważny, nawiązujący do dodatniej określoności, sformułował Győrgy Pólya[41]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha)\Phi(\beta)e^{i(\alpha+\beta)x}e^{(\alpha-\beta)y}(\alpha-\beta)^2\, d\alpha\, d\beta \geqslant 0$$

dla dowolnych rzeczywistych x i y, gdzie

$$\Phi(u) = \sum_{n=1}^{\infty}(2n^4\pi^2 e^{\frac{9}{2}u} - 3n^2\pi e^{\frac{5}{2}u})e^{-n^2\pi e^{2u}}.$$

Ciekawe jest to, że Hipotezę Riemanna można sformułować w terminach analizy funkcjonalnej. Oznaczmy przez $L^2(0,1)$ przestrzeń Banacha funkcji całkowalnych z kwadratem (w sensie Lebesgue'a) na przedziale $(0,1)$. Hipoteza Riemanna jest równoważna stwierdzeniu, że zbiór funkcji postaci

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\{\theta_k/t\},$$

gdzie dla dowolnej liczby rzeczywistej x symbol $\{x\} = x - [x]$ oznacza część ułamkową x, natomiast parametry θ_k i współczynniki c_k spełniają warunki

$$\theta_k \in (0,1) \ \text{ oraz } \ \sum_{k=1}^{n} c_k = 0,$$

40 Xian–Jin Li, *The Positivity of a Sequence of Numbers and the Riemann Hypothesis.* J. Number Theory 65(1997), 325–333.
41 G. Pólya, *Über die algebraisch funktiontheoretischen Untersuchungen von J.L.W.V. Jensen.* Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. 7(1927), No.17.

jest gęsty w $L^2(0,1)$ (B. Nyman[42]). Inny warunek równoważny odwołujący się do tej samej przestrzeni funkcyjnej można sformułować następująco. Niech

$$A : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$$

będzie operatorem całkowym zdefiniowanym wzorem

$$Af(u) = \int_0^1 f(x) \left\{ \frac{u}{x} \right\} dx \qquad (f \in L^2(0,1), u \in (0,1)).$$

Hipoteza Riemanna jest równoważna stwierdzeniu, że A jest różnowartościowy, to znaczy dla różnych funkcji $f, g \in L^2(0,1)$ przyjmuje różne wartości (J. Alcántara-Bode[43]).

Warunek równoważny wyrażony w terminach analizy funkcji zmiennej rzeczywistej podał Marcel Riesz[44]: dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{(k-1)! \zeta(2k)} \right| \leqslant x^{1/2+\epsilon}$$

przy $x \geqslant x_0(\varepsilon)$.

Na zakończenie tego krótkiego przeglądu warto wspomnieć o warunku równoważnym z Hipotezą Riemanna sformułowanym w terminach algebry, a ściślej mówiąc teorii grup. Niech S_n oznacza grupę symetryczną zbioru n-elementowego, której elementami są permutacje zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, a działaniem grupowym składanie permutacji. Niech ponadto $g(n)$ oznacza maksymalny rząd elementu S_n. Hipoteza Riemanna jest równoważna temu, że

$$\log g(n) < (\mathrm{li}(n))^{-\frac{1}{2}}$$

(J.-P. Massias, J.-L. Nicolas, G. Robin[45]).

---

42 B. Nyman, *On some groups and semigroups of translations*. Thesis, Uppsala (1950).

43 J. Alcántara-Bode, *An integral equation formulation of the Riemann hypothesis.* Integral Equations Operator Theory 17(1993), no. 2, 151–168.

44 M. Riesz, *Sur l'hypothèse de Riemann*. Acta Mathematica 40(1916), 185–190.

45 J.-P. Massias, J.-L. Nicolas, G. Robin, *Évaluation asymptotique de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique.* Acta Arith. 50(1988), 221–242.

FUNKCJE *L* W TEORII LICZB

Funkcja dzeta Riemanna jest tylko jedną z wielu podobnych funkcji rozważanych w teorii liczb i znanych pod wspólną nazwą *funkcji L*. Pojawiły się one w sposób naturalny przy badaniu rozmaitych zagadnień arytmetycznych i z biegiem czasu stały się nieodzownym narzędziem w rękach teoretyków liczb. Trudno podać ścisłą definicję funkcji *L*. Najbardziej udana próba aksjomatyzacji pochodzi od Atle Selberga, który w 1989 roku wyodrębnił najważniejsze własności znanych funkcji *L* i przyjął je jako aksjomaty tak zwanej *klasy Selberga*[46]. Pomijając funkcję stałą równą 1, funkcja dzeta Riemanna jest najprostszym, ale niezwykle ważnym elementem tej klasy. Przytoczenie definicji innych elementów wykracza poza skromne ramy niniejszego opracowania. Ograniczę się tylko do wymienienia niektórych z nich, jednocześnie kierując zainteresowanego Czytelnika do stosownej literatury. Od razu chciałbym uprzedzić, że osobie nieposiadającej odpowiedniego przygotowania matematycznego wymienione nazwy mogą niewiele mówić. Przytaczam je, aby zilustrować fakt, iż przyglądając się funkcji dzeta Riemanna, widzimy tylko wierzchołek góry lodowej, przejaw znacznie rozleglejszej teorii. Dodajmy, że dla wszystkich wymienionych niżej funkcji spodziewamy się, iż prawdziwy jest odpowiednik Hipotezy Riemanna.

Różne rodzaje funkcji *L*:

- funkcje *L* Dirichleta z charakterami pierwotnymi[47],
- funkcje dzeta Dedekinda ciał algebraicznych oraz funkcje *L* Heckego z pierwotnymi charakterami Heckego[48],
- funkcje *L* Artina nieprzywiedlnych reprezentacji Galois[49],
- funkcje dzeta form modularnych (*newforms* i *Maass waves*) oraz, ogól-

---

[46] A. Selberg, *Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series.* Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (Maiori, 1989), 367–385, Univ. Salerno, Salerno, 1992.

[47] H. Davenport, *Multiplicative number theory,* Third edition. Revised and with a preface by Hugh L. Montgomery. Graduate Texts in Mathematics, 74. Springer-Verlag, New York, 2000. xiv+177 pp.

[48] W. Narkiewicz, *Elementary and analytic theory of algebraic numbers,* Third edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2004. xii+708 pp.

[49] H. Heilbronn, *Zeta-functions and L-functions*. Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965), 204–230, Thompson, Washington, D.C., 1967.

niej, funkcje L reprezentacji automorficznych (funkcje L Langlandsa)[50],
- globalne funkcje L rozmaitości algebraicznych nad ciałami skończonymi (w szczególności funkcje Hassego-Weila krzywych eliptycznych)[51].

DLACZEGO HIPOTEZA RIEMANNA JEST WAŻNA?

Hipoteza Riemanna jest ważna z powodu swych daleko idących konsekwencji. Znanych jest obecnie kilkaset twierdzeń warunkowych, które są prawdziwe przy założeniu Hipotezy Riemanna. Są to twierdzenia z reguły bardzo silne, znacznie silniejsze od ich wersji „bezwarunkowych", to znaczy udowodnionych bez zakładania prawdziwości Hipotezy. Warto przy tym zwrócić uwagę na fakt, że wyniki uzyskane przy jej założeniu mają zwykle walor stwierdzeń ostatecznych, to znaczy takich, których ulepszyć się już nie da. W paragrafie opisującym warunki równoważne Hipotezie Czytelnik znajdzie szereg wyników tego typu. Oczywiście najbardziej klasyczny przykład dotyczy oszacowania reszty w Twierdzeniu o liczbach pierwszych (16). Z Hipotezy Riemanna wynika również, że przy dowolnym $\varepsilon > 0$ każdy przedział postaci

$$[x, x + x^{1/2+\varepsilon}] \ \text{dla} \ x \geqslant x_0(\varepsilon)$$

zawiera co najmniej jedną liczbę pierwszą, co więcej liczb tych jest „dużo":

$$\pi(x + h) - \pi(x) \sim \frac{h}{\log x} \quad , \quad h \geqslant x^{1/2+\varepsilon}. \tag{18}$$

Hipoteza Riemanna ma daleko idące konsekwencje dotyczące analitycznych własności funkcji dzeta. W szczególności pociąga za sobą prawdziwość tak zwanej *Hipotezy Lindelöfa*:

$$\zeta(\frac{1}{2} + it) \ll t^{\varepsilon} \quad (t \to \infty). \tag{19}$$

---

50 H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic number theory.* American Mathematical Society Colloquium Publications, 53. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. xii+615 pp.
51 H. Iwaniec, E. Kowalski, ibidem.

To z kolei jest bardzo ważne przy dowodach wielu innych twierdzeń. Użyty we wzorze (19) symbol $\ll$ jest równoważny notacji O: zapis $f(x) \ll g(x)$ oznacza to samo co $f(x) = O(g(x))$.

Jeszcze bardziej spektakularne konsekwencje ma uogólniona Hipoteza Riemanna, to znaczy Hipoteza postulująca, że nietrywialne zera różnych funkcji L leżą na prostej krytycznej. Ze względu na dość techniczny charakter zagadnień, które zamierzamy teraz zasygnalizować, mniej przygotowany Czytelnik może bez żadnej straty pominąć lekturę dalszej części tego podrozdziału.

Bezpośrednie uogólnienia Twierdzenia o liczbach pierwszych dotyczą liczb pierwszych w postępach arytmetycznych oraz rozmieszczenia ideałów pierwszych w ciałach liczb algebraicznych. Bardzo ogólny wynik tego typu można sformułować następująco. Niech L/K będzie rozszerzeniem Galois ciał liczbowych, natomiast $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ ideałem pierwszym, nierozgałęzionym w L/K, zaś $C \subset Gal(L/K)$ – klasą elementów sprzężonych w grupie Galois rozszerzenia L/K. Niech ponadto

$$\pi_C(x) = \#\{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K : \left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right] \in C, N(\mathfrak{p}) \leqslant x\},$$

gdzie

$$\left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right]$$

oznacza tak zwany symbol Artina. Przy założeniu prawdziwości Hipotezy Riemanna dla funkcji L Heckego, przy dowolnym $\varepsilon > 0$ zachodzi następujący wzór asymptotyczny

$$\pi_C(x) = \frac{\#C}{(L:K)}\mathrm{li}(x) + O(x^{1/2+\varepsilon}).$$

Prawdziwość uogólnionej Hipotezy Riemanna pociąga za sobą prawdziwość Hipotezy Artina o pierwiastkach pierwotnych. Można ją sformułować następująco. Liczbę całkowitą a nazywamy *pierwiastkiem pierwotnym modulo p*, gdzie p jest liczbą pierwszą, gdy dla dowolnej liczby całkowitej b, niepodzielnej przez p, istnieje wykładnik $k \in \mathbb{N}$ taki, że

$$b \equiv a^k (\mathrm{mod} p).$$

Hipoteza Artina postuluje, że każda liczba całkowita $a \neq -1$, niebędąca kwadratem, jest pierwiastkiem pierwotnym dla nieskończenie wielu liczb pierwszych p. Oznaczmy przez $N_a(x)$ liczbę liczb pierwszych $p \leqslant x$, dla których a jest pierwiastkiem pierwotnym. Hipoteza Artina przewiduje, że $N_a(x) \to \infty$ przy $x \to \infty$. Christopher Hooley[52] udowodnił w 1967 roku, że jeżeli prawdziwa jest Hipoteza Riemanna dla funkcji dzeta Dedekinda ciał liczbowych, to

$$N_a(x) \sim c_0 \pi(x)$$

dla pewnej stałej $c_0 > 0$. Roger Heath-Brown[53] wykazał bez zakładania żadnych nieudowodnionych hipotez, że istnieją co najwyżej dwie liczby pierwsze a, dla których Hipoteza Artina nie jest prawdziwa.

Uogólniona Hipoteza Riemanna ma także ciekawe konsekwencje w geometrii algebraicznej. Niech E i E' będą nieizogenicznymi krzywymi eliptycznymi nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$, o przewodnikach równych N_E i $N_{E'}$ odpowiednio. Hipoteza Riemanna dla funkcji Hassego-Weila implikuje[54], że istnieje liczba pierwsza

$$p \leqslant \log^2(N_E N_{E'}),$$

dla której redukcje E_p i E'_p są krzywymi eliptycznymi nad p-elementowym ciałem skończonym $\mathbb{F}_p$ oraz

$$\#E_p \neq \#E'_p.$$

HIPOTEZA I RZECZYWISTOŚĆ

Wspomnieliśmy poprzednio, że Hipoteza Riemanna pociąga za sobą prawdziwość Hipotezy Lindelöfa. Wyznaczanie dopuszczalnych wartości ε w oszacowaniu (19) jest klasycznym zagadnieniem analitycznej teorii liczb, któremu poświęcono wiele prac, opracowując bardzo wyrafinowa-

52 C. Hooley, *On Artin's conjecture.* J. Reine Angew. Math. 225(1967), 209–220.

53 D.R. Heath-Brown, *Artin's conjecture for primitive roots*. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 37(1986), no. 145, 27–38.

54 J.-P. Serre, *Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev*. Collected Papers, vol. III (1972-1984), 563–641, Springer Verlag 1986.

ne metody. Ostatni krok postawił niedawno (2017) Jean Bourgain[55], który udowodnił, że Hipoteza Lindelöfa zachodzi dla $\varepsilon > 13/84$.

Dla ustalonych liczb $\sigma \geqslant 1/2$ oraz $T > 0$ oznaczmy przez $N(\sigma, T)$ liczbę nietrywialnych zer $\rho = \beta + i\gamma$ funkcji dzeta Riemanna spełniających nierówności

$$\beta \geqslant \sigma \text{ oraz } |\gamma| \leqslant T.$$

Oczywiście Hipoteza Riemanna przewiduje, że

$$N(\sigma, T) = 0 \text{ dla } \sigma > \frac{1}{2}, T > 0.$$

Tego nie potrafimy obecnie dowieść, ale możliwe do uzyskania są słabsze rezultaty postaci

$$N(\sigma, T) \ll T^{f(\sigma)} \qquad (1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1, T > 0),$$

gdzie $f(\sigma)$ jest nierosnącą funkcją zmiennej $\sigma \in [1/2, 1]$ taką, że $0 \leqslant f(\sigma) \leqslant 1$, a także oszacowania typu

$$N(\sigma, T) \ll T^{c(1-\sigma)} \qquad (1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1, T > 0), \tag{20}$$

gdzie c jest pewną stałą. Wyniki tego typu noszą nazwę *twierdzeń gęstościowych*. Znana Hipoteza Gęstościowa postuluje, że oszacowanie (20) jest prawdziwe dla dowolnego $c > 2$, ale najlepszy obecnie znany wynik pochodzi od Martina Huxleya[56] z roku 1972, który wykazał, że za c można wziąć dowolną liczbę większą od 12/5. W roku 2000 Jean Bourgain[57] udowodnił, że Hipoteza Gęstościowa jest prawdziwa dla $\sigma \geqslant 25/32$. Wiadomo, że Hipoteza Lindelöfa implikuje Hipotezę Gęstościową. Ciekawe jest to, że Hipoteza Gęstościowa, jakkolwiek ewidentnie znacznie słabsza od Hipotezy Riemanna, wystarcza do wykazania bardzo silnego wyniku dotyczącego rozmieszczenia liczb pierwszych w „krótkich" przedziałach, a mianowicie wzoru (18), będącego – jak stwierdziliśmy wcze-

[55] J. Bourgain, *Decoupling, exponential sums and the Riemann zeta function.* J. Amer. Math. Soc. 30(2017), no. 1, 205–224.

[56] M.N. Huxley, *On the difference between consecutive primes.* Invent. Math. 15(1972), 164–170.

[57] J. Bourgain, *On large values estimates for Dirichlet polynomials and the density hypothesis for the Riemann zeta function*. Internat. Math. Res. Notices 2000, no. 3, 133–146.

śniej – konsekwencją Hipotezy Riemanna. W cytowanej powyżej pracy z 1972 roku Martin Huxley wykazał, że formuła (18) jest prawdziwa dla $h \geqslant x^{7/12+\varepsilon}$.

Hipoteza Riemanna stwierdza, że obszar $\sigma > 1/2$ jest wolny od zer funkcji dzeta Riemanna. Widzieliśmy wcześniej, że znacznie słabsze stwierdzenie $\zeta(1+it) \neq 0$ dla $-\infty < t < \infty$ jest podstawą dowodu Twierdzenia o liczbach pierwszych. Stąd znaczenie twierdzeń wyznaczających obszary wolne od zer, zawierające punkty wewnątrz pasa krytycznego. Dla przykładu, podstawą dowodu formuły (15) jest fakt, wykazany przez de la Vallée Poussina, że $\zeta(\sigma+it) \neq 0$ dla

$$\sigma > 1 - \frac{c_0}{\log(2+|t|)} \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Iwan Winogradow[58] oraz niezależnie Mikołaj Korobow[59] wykazali, że

$$\zeta(\sigma+it) \neq 0 \quad \text{dla} \quad \sigma > 1 - \frac{1}{\log^{\theta}|t|}$$

$$(|t| \geqslant t_0(\theta) \qquad \theta > 2/3).$$

Wynika stąd, że

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(xe^{-c\log^{\theta'} x}) \quad , \quad \theta' < 3/5.$$

Wiele prac poświęcono zerom funkcji dzeta, które zachowują się zgodnie z przewidywaniami, to znaczy leżą na prostej krytycznej. Niech $N_0(T)$ oznacza funkcję liczącą te zera:

$$N_0(T) = \#\{\rho = \frac{1}{2} + i\gamma : 0 < \gamma < T\}.$$

Oczywiście zgodnie z Hipotezą Riemanna powinniśmy mieć

$$N_0(T) = N(T) \quad (T \geqslant 0),$$

gdzie $N(T)$ jest rozważaną już przez nas poprzednio funkcją liczącą wszystkie zera nietrywialne, por. (14). Pierwszy ważny wynik dotyczący zer na

---

[58] I.M. Vinogradov, *A new estimate of the function* $\zeta(1+it)$, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 22(1958), 161–164.

[59] N.M. Korobov, *Estimates of trigonometric sums and their applications (Russian).* Uspehi Mat. Nauk 13 1958 no. 4 (82), 185–192.

prostej krytycznej uzyskał w 1914 roku G.H. Hardy[60], który wykazał[61], że takich zer jest nieskończenie wiele. Atle Selberg[62] udowodnił w 1942 roku, że dodatnia gęstość zer nietrywialnych spełnia Hipotezę Riemanna, to znaczy, że

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{N_0(T)}{N(T)} > 0.$$

Wynik ten został istotnie wzmocniony przez Normana Levinsona[63] w 1974 roku, natomiast H.M. Bui, Brian Conrey i Matthew Young[64] wykazali w 2011 roku, że

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{N_0(T)}{N(T)} \geqslant 0.4105.$$

Implikuje to, że ponad 41% nietrywialnych zer funkcji dzeta Riemanna leży na prostej krytycznej. Mówiąc obrazowo – aczkolwiek niezbyt precyzyjnie – Hipoteza Riemanna jest udowodniona w 41 procentach. W cytowanej powyżej pracy Selberg wykazał również, że dla dowolnej funkcji $\Phi(t)$ dążącej do nieskończoności przy $t \to \infty$ prawie wszystkie nietrywialne zeta funkcji dzeta leżą w obszarze

$$\frac{1}{2} - \frac{\Phi(|t|)}{\log|t|} \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2} + \frac{\Phi(|t|)}{\log|t|}, \qquad (|t| \geqslant 2). \tag{21}$$

Powyższe stwierdzenie należy rozumieć w sensie gęstości. Dokładniej, oznaczając przez $N_1(T)$ liczbę zer $\rho = \beta + i\gamma$ funkcji dzeta Riemanna w obszarze (21), których części urojone spełniają nierówność $|\gamma| \leqslant T$, termin „prawie wszystkie” oznacza, że

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{N_1(T)}{N(T)} = 1.$$

---

[60] Godfrey Harold Hardy (1877–1947) – matematyk angielski.

[61] G.H. Hardy, *Sur les zéros de la function $\zeta(s)$ de Riemann.* C. R. Acad. Sci. Paris 158(1914), 1012–1014.

[62] A. Selberg, *On the zeros of Riemann's zeta-function.* Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I. 1942, (1942). no. 10, 59 pp.

[63] N. Levinson, *More than one third of zeros of Riemann's zeta-function are on $\sigma = 1/2$,* Advances in Math. 13 (1974), 383–436.

[64] H.M. Bui, B. Conrey, M. Young, *More than 41% of the zeros of the zeta function are on the critical line.* Acta Arith. 150(2011), no. 1, 35–64.

Można więc obrazowo powiedzieć, że nietrywialne zera, nawet jeśli nie leżą dokładnie na prostej krytycznej, to na pewno „grupują" się blisko niej.

CZY HIPOTEZA RIEMANNA JEST PRAWDZIWA? ARGUMENTY „ZA"

ARGUMENT „ESTETYCZNY"

Przy założeniu Hipotezy Riemanna teoria rozmieszczenia liczb pierwszych (i ich uogólnień) przybiera najprostszą i zarazem najbardziej elegancką formę.

Mimo że trudno uznać ten argument za czysto merytoryczny, to ma on wśród matematyków wielu gorących zwolenników. Osobom niebędącym matematykami czasami trudno jest zrozumieć łatwość, z jaką ci ostatni przykładają miarę estetyczną do teorii matematycznych. Często o twierdzeniach, formułach czy też całych teoriach mówią, że są „ładne", czasami „piękne". Ciekawym zadaniem psychologa nauki byłoby zbadanie, jakie dokładnie odczucia estetyczne kojarzą się matematykom z konkretnymi twierdzeniami. Na pewno chodzi tu o dwie podstawowe cechy: nietrywialność i prostotę. Rzeczy, które mówią o czymś coś ważnego i głębokiego w sposób prosty, jesteśmy skłonni uznać za piękne. Z kolei rozważania nadmiernie skomplikowane i nieprowadzące do jednoznacznych konkluzji stoją na drugim biegunie tej skali. Zwykle bywa tak, że odpowiedzi częściowe, jakkolwiek czasami wartościowe, nie oddziałują na zmysł estetyczny matematyka właśnie z tego powodu, że są zbyt zawiłe. Mamy tu niewątpliwie do czynienia z naturalnym dążeniem do harmonii, która zwykle objawia się w prostocie. „Prostotę" należy tu rozumieć w sposób subtelny, gdyż nie wyklucza ona głębi. Fakt, że zakładając prawdziwość Hipotezy Riemanna, można w stosunkowo prosty sposób udowodnić wiele ważnych twierdzeń dotyczących liczb pierwszych, czasami nadając im formę ostateczną, przemawia do wyobraźni i ma niewątpliwy walor estetyczny.

ARGUMENT Z GEOMETRII ALGEBRAICZNEJ

Odpowiednik Hipotezy Riemanna jest prawdziwy w przypadku funkcji dzeta rozmaitości algebraicznych.

Funkcje dzeta rozważane w geometrii algebraicznej nie są bezpośrednim uogólnieniem funkcji dzeta Riemanna, a więc przynajmniej na pierwszy rzut oka mogłoby się wydawać, że twierdzenia ich dotyczące nie powinny mieć dla nas większego znaczenia. W istocie jest inaczej, gdyż istnieją zadziwiające podobieństwa między tymi dwiema teoriami. Niestety skromne ramy niniejszego opracowania nie pozwalają na dokładniejsze omówienie tych podobieństw. Nawet sama definicja geometrycznej funkcji dzeta jest zbyt techniczna, aby ją tutaj przytoczyć. Dość powiedzieć, że geometria algebraiczna zajmuje się badaniem obiektów geometrycznych zwanych rozmaitościami, których szczególnymi przypadkami są zbiory rozwiązań układów równań wielomianowych. Z rozmaitościami pewnego typu (np. dla nieosobliwych krzywych rzutowych nad ciałami skończonymi) można skojarzyć funkcje zmiennej zespolonej, zwane funkcjami dzeta rozmaitości, które są w pewnym sensie podobne do funkcji dzeta Riemanna. Różnią się jednak od tej ostatniej w sposób zasadniczy, na przykład są złożeniami funkcji wykładniczej i wymiernej, a więc z punktu widzenia analizy są obiektami nieskończenie prostszymi od funkcji dzeta Riemanna. Są też uderzające podobieństwa. Funkcje te są zdefiniowane za pomocą szeregu Dirichleta, posiadają odpowiednik iloczynu Eulera i spełniają pewne równanie funkcyjne łączące ich wartości w punktach s i $1 - s$. Można więc mówić w tym przypadku o prostej krytycznej i pytać, czy wszystkie ich zera leżą na niej (funkcje te nie posiadają zer trywialnych). Inaczej mówiąc, w kontekście geometrycznych funkcji dzeta można w sposób sensowny sformułować analogon Hipotezy Riemanna. Podstawowe pojęcia i hipotezy dotyczące funkcji dzeta ogólnych rozmaitości algebraicznych pochodzą od André Weila[65] i datują się na lata 40. ubiegłego wieku. W szczególności w pracy z 1949 roku sformułował on cztery słynne hipotezy, nazwane później Hipotezami Weila, które opisywały hipotetyczne własności geometrycznych funkcji dzeta, między innymi postulowały prawdziwość analogonu Hipotezy Riemanna[66]. Prace nad hipotezami Weila przyczyniły się w znamienity sposób do rozwoju geometrii algebraicznej i w znacznym stopniu rozwój ten ukierun-

65 André Weil (1906–1998) – matematyk francuski.

66 Por. A. Weil, *Numbers of solutions of equations in finite fields*, Bulletin of the AMS, 55(1949), 497–508.

kowały[67]. Stosunkowo szybko udało się udowodnić trzy spośród czterech hipotez Weila, przy czym okazało się, że są one wnioskami z rozwiniętej przez Alexandra Grothendiecka[68] i jego współpracowników teorii tak zwanych kohomologii etalnych (możliwe są też inne podejścia). Najtrudniejszy do dowodu okazał się analogon Hipotezy Riemanna, ale w końcu i jego prawdziwość została udowodniona przez Pierre'a Deligne'a w latach 70. ubiegłego stulecia[69]. Dowód odpowiednika Hipotezy Riemanna dla funkcji dzeta rozmaitości algebraicznych jest uważany za jedno z największych osiągnięć matematyki dwudziestego wieku. Jest też powszechnie uważany za najistotniejszy argument teoretyczny przemawiający za prawdziwością klasycznej Hipotezy Riemanna.

Warto wspomnieć, że niektóre szczególne przypadki funkcji dzeta omawianego wyżej typu były badane przed pojawieniem się ich ogólnej teorii. Na przykład Helmut Hasse[70] już w 1933 roku wykazał odpowiednik Hipotezy Riemanna w przypadku tak zwanych krzywych eliptycznych[71].

ARGUMENT NUMERYCZNY

Dziesięć bilionów (10^{13}) *początkowych zer leży na prostej krytycznej i są one pojedyncze*[72].

Już sam Riemann wyznaczył numeryczne wartości kilku początkowych zer nietrywialnych i stwierdził, że leżą one na prostej krytycznej. Numeryczne wyznaczanie nietrywialnych zer jest motywowane co

---

67 Por. J. Dieudonné, *On the history of the Weil conjectures*. The Mathematical Intelligencer 10(1975), 7–21.

68 Alexander Grothendieck (1928–2014) – matematyk francuski pochodzenia niemieckiego, Medal Fieldsa w 1966 r.

69 P. Deligne, *La Conjecture de Weil I*. Publications Math. IHES 43(1974), 273–308; *La Conjecture de Weil II*, Publications Math. IHES 52(1980), 137–252.

70 Helmut Hasse (1898–1979) – matematyk niemiecki.

71 Wynik opublikowano w 1936 roku w serii prac H. Hasse, *Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I, II & III*. Crelle's Journal, 175(1936).

72 Stwierdzenie to, jakkolwiek intuicyjnie jasne, wymaga komentarza ze względu na użyty kolokwializm „zera początkowe". Należy je rozumieć następująco: jeżeli zera nietrywialne o dodatniej części urojonej ustawimy w ciąg $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, przy czym $0 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \gamma_3 \leqslant \ldots$, to dla $1 \leqslant n \leqslant 10^{13}$ mamy $\beta_n = 1/2$. Termin „zero pojedyncze" oznacza zero ρ, dla którego $\zeta'(\rho) \neq 0$.

najmniej dwiema przesłankami. Po pierwsze, znalezienie zera nietrywialnego leżącego poza prostą krytyczną rozstrzygnęłoby (negatywnie) Hipotezę Riemanna, natomiast stwierdzenie, że wiele z nich leży na prostej krytycznej jest ważnym argumentem za jej prawdziwością. Po drugie, wyznaczanie nietrywialnych zer jest dobrym testem na skuteczność istniejących algorytmów oraz współczesnych komputerów. Postęp w obliczeniach numerycznych zer ilustrują następujące dane. W roku 1905 znanych było 15 początkowych zer funkcji dzeta Riemanna (J.P. Gram). Położenie początkowego tysiąca zer poznaliśmy w 1956 roku (E.C. Titchmarsh, A. M. Turing), 250 tys. w 1966 roku (R.S. Lehman), 3,5 mln w 1968 (J.B. Rosser, J.M. Yohe, L. Schoenfeld), a 1,5 mld w 1986 (J. van de Lune, H.J.J. te Riele, D.T. Winter). W XXI wieku liczby te szybko wzrastały. W 2001 roku zlokalizowano 10 mld początkowych zer (J. van de Lune). Obecny rząd wielkości – 10 bilionów – osiągnięto w 2004 roku[73]. Podkreślmy raz jeszcze, że w trakcie tych rozległych eksperymentów numerycznych nie znaleziono żadnego zera poza prostą krytyczną. Wszystkie znane w dniu dzisiejszym (2018) nietrywialne zera funkcji dzeta Riemanna są pojedyncze.

Dzisiaj każdy może łatwo zweryfikować przy użyciu popularnego komputera obliczenia z ery „przedkomputerowej”. Oto wartości dziesięciu nietrywialnych (początkowych) zer funkcji dzeta Riemanna obliczonych z dokładnością do dwudziestu miejsc dziesiętnych przy użyciu pakietu Mathematica. Czas obliczeń to ułamek sekundy.

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{1}{2} + i\,14.13472514173469379045\dots \\
\rho_2 &= \frac{1}{2} + i\,21.02203963877155499262\dots \\
\rho_3 &= \frac{1}{2} + i\,25.01085758014568876321\dots \\
\rho_4 &= \frac{1}{2} + i\,30.42487612585951321031\dots \\
\rho_5 &= \frac{1}{2} + i\,32.93506158773918969066\dots
\end{aligned}$$

[73] Zainteresowany Czytelnik znajdzie wiele interesujących informacji na ten temat w pracy X. Gourdon, *The* 10^{13} *First Zeros of the Riemann Zeta Function, and Zeros Computation at Very Large Height. Oct. 24, 2004*, dostępnej w Internecie pod adresem http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros1e13-1e24.pdf.

$$\rho_6 = \frac{1}{2} + i\,37.586178158825671257 21\ldots$$

$$\rho_7 = \frac{1}{2} + i\,40.918719012147495187 39\ldots$$

$$\rho_8 = \frac{1}{2} + i\,43.327073280914999519 49\ldots$$

$$\rho_9 = \frac{1}{2} + i\,48.005150881167159727 94\ldots$$

$$\rho_{10} = \frac{1}{2} + i\,49.773832477672302181 91\ldots$$

ARGUMENT PROBABILISTYCZNY

Jeżeli zachowanie się liczb pierwszych jest „losowe", to Hipoteza Riemanna jest prawdziwa z prawdopodobieństwem 1.

Jak widzieliśmy poprzednio, Hipoteza Riemanna jest równoważna temu, że rząd wzrostu funkcji sumacyjnej funkcji Möbiusa jest niewiele większy od funkcji pierwiastkowej, por. (17). Wiadomo, że $\mu(n)$ przyjmuje tylko wartości 0 oraz ± 1. Dla uproszczenia skoncentrujmy się na wartościach niezerowych. Jeżeli liczba naturalna (bezkwadratowa) ma parzystą liczbę dzielników pierwszych, to $\mu(n) = 1$, w przeciwnym wypadku $\mu(n) = -1$. Rozważmy ciąg kolejnych liczb bezkwadratowych

$$1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 21, 22\ldots$$

i odpowiadający mu ciąg wartości funkcji Möbiusa

$$1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1\ldots \tag{22}$$

Jeżeli zgodzimy się z poglądem, że liczby pierwsze pojawiają się w ciągu liczb naturalnych losowo, to wartości $+1$ oraz -1 w ciągu (22) powinny występować z tą samą częstością. Inaczej mówiąc, prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrany element ciągu (22) ma wartość 1, wynosi 1/2. Zupełnie tak samo jest z wyrazami równymi -1.

Można więc wyobrazić sobie następujący model probabilistyczny opisanej sytuacji. Rozpatrujemy nieskończony ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych, o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa danym wzorem

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Niech $S(N) = \sum_{n \leqslant N} X_n$. Mówiąc obrazowo, opisany model odpowiada nieskończonemu ciągowi rzutów symetryczną monetą. Jeżeli w n-tym rzucie pojawi się orzeł, to wygrywamy złotówkę, jeśli pojawi się reszka – złotówkę płacimy. Wartość $S(N)$ to bilans naszego konta po N rzutach.

Zachodzi następujące twierdzenie znane z rachunku prawdopodobieństwa[74].

TWIERDZENIE: *Dla dowolnej liczby dodatniej ε oszacowanie:* $|S(N)| \leqslant N^{1/2+\varepsilon}$ *zachodzi z prawdopodobieństwem dążącym do* 1 *przy N dążącym do nieskończoności.*

Jeżeli więc liczby pierwsze są „naprawdę" rozmieszczone losowo i w związku z tym ciąg (22) jest typowym ciągiem składającym się z ±1, to wzór (17) – a wraz z nim Hipoteza Riemanna – są prawdziwe z prawdopodobieństwem 1.

ARGUMENT „INDUKCYJNY"

Wszystkie przewidywania oparte na założeniu, że Hipoteza Riemanna jest prawdziwa, o ile zostały rozstrzygnięte, okazały się prawdziwe.

Istnieje wiele przykładów ilustrujących opisane zjawisko. Dla przykładu omówimy bliżej dwa z nich: Hipotezę Goldbacha oraz opracowanie deterministycznego testu pierwszości działającego w czasie wielomianowym.

Hipoteza Goldbacha[75] to jedno z najbardziej znanych zagadnień teorii liczb, które w pełnej ogólności w dniu dzisiejszym (2018) nadal pozostaje otwarte. Niemniej jednak udało się niedawno rozstrzygnąć jego ważny przypadek, a mianowicie tak zwaną słabą Hipotezę Goldbacha, przy

---

74 Jest to prosty wniosek z tak zwanego Centralnego Twierdzenia Granicznego, które można znaleźć w każdym dobrym podręczniku rachunku prawdopodobieństwa, por. np. W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*. T. 1, rozdział X, PWN, Warszawa 2017.

75 Christian Goldbach (1690–1764) – matematyk pruski.

czym najpierw uczyniono istotny postęp przy założeniu (uogólnionej) Hipotezy Riemanna, a następnie pozbyto się tego założenia. Hipotezę sformułował Goldbach w 1742 roku w liście do Eulera. Współcześnie przez Hipotezę Golbacha rozumie się następujące stwierdzenie: każda parzysta liczba naturalna większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych. Zauważmy, że wynika stąd natychmiast, że każda liczba naturalna większa od 3 jest sumą co najwyżej trzech liczb pierwszych. Natomiast przez słabą Hipotezę Goldbacha rozumie się stwierdzenie, że każda nieparzysta liczba naturalna większa od 5 może być przedstawiona jako suma trzech liczb pierwszych.

G.H. Hardy i J.E. Littlewood, zakładając prawdziwość uogólnionej Hipotezy Riemanna (dla funkcji L Dirichleta), wykazali[76], iż istnieje stała C taka, że wszystkie nieparzyste liczby naturalne $n > C$ są sumami trzech liczb pierwszych. A zatem udowodnili, że jeżeli prawdziwa jest uogólniona Hipoteza Riemanna, to prawdziwa jest również słaba Hipoteza Goldbacha dla wszystkich nieparzystych n z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby przypadków. Był to w tamtych czasach wynik sensacyjny, gdyż do tej pory uważano, że matematyka nie wypracowała jeszcze środków niezbędnych do zaatakowania tak subtelnego zagadnienia[77]. Wynik Hardy'ego i Littlewooda uznano za bardzo silny argument na rzecz prawdziwości Hipotezy Goldbacha i niewątpliwie przyczynił się on do intensyfikacji badań w tym kierunku. Przełom nastąpił w 1937 roku, kiedy to I.M. Winogradow udowodnił twierdzenie Hardy'ego-Littlewooda bez zakładania Hipotezy Riemanna[78]. Stała C w twierdzeniu Winogradowa była bardzo duża (oszacowano jej wartość na e^{3315}). Oszacowanie tej stałej było przedmiotem badań wielu matematyków, jednak jej wartość była zbyt wielka, aby można było zweryfikować numerycznie pozostałe przypadki. Ostatecznie w 2014 roku Harald Helfgott[79] wykazał, że $C \leqslant 10^{27}$, co po-

---

76 G.H. Hardy and J.E. Littlewood, *Some problems of 'Partitio numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes.* Acta Math., 44(1)(1923), 1–70.

77 Znany niemiecki teoretyk liczb Edmund Landau (1877–1938) w 1912 roku określił Hipotezę Goldbacha przymiotnikiem „unangreifbar", por. E. Landau, *Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion.* Proceedings of the fifth International Congress of Mathematicians, volume 1, 93–108. Cambridge, 1912.

78 I.M. Vinogradov, *Representation of an odd number as a sum of three primes.* Dokl. Akad. Nauk. SSR, 15(1937), 291–294.

79 H. A. Helfgott, *The ternary Goldbach conjecture is true.* arXiv:1312.7748v2 [math.NT].

zwoliło na dokończenie rozumowania przy pomocy komputera[80] i w rezultacie doprowadziło do pełnego dowodu słabej Hipotezy Goldbacha.

Inny przykład zagadnienia, które najpierw zostało rozwiązane przy założeniu Hipotezy Riemanna, a następnie bezwarunkowo, należy do teorii algorytmów. W wielu zagadnieniach praktycznych, na przykład w kryptologii, potrzebne jest szybkie znajdowanie „dużych" liczb pierwszych, lub też stwierdzenie, czy dana liczba naturalna jest pierwsza. Dla małych liczb jest to zagadnienie proste. Na przykład, aby rozstrzygnąć, czy liczba 2017 jest pierwsza, wystarczy wykonać dzielenie z resztą tejże liczby przez wszystkie liczby naturalne od niej mniejsze i przekonać się, czy wśród nich jest taka, która dzieli 2017 bez reszty. Nie nastręcza to większych trudności, gdyż wystarczy wykonać w tym celu zaledwie 22 dzielenia przez liczby nieparzyste nieprzekraczające 43 (dlaczego?). Oczywiście metodę można zastosować do dowolnej liczby naturalnej. Od razu też widać, że taki naiwny sposób postępowania można udoskonalić na wiele sposobów, ale w istocie nie prowadzi to do naprawdę dobrych rezultatów. Na przykład trudno w ten sposób stwierdzić, czy liczba

$$226474634626627$$

jest, czy też nie jest pierwsza. Proszę się o tym przekonać samemu. Prawdopodobnie po wykonaniu pewnej liczby prób, na przykład z użyciem kalkulatora, Czytelnik da za wygraną, bowiem najmniejszy dzielnik większy od 1 naszej liczby to 14624611. Do badania pierwszości liczb naturalnych opracowano znacznie lepsze metody (algorytmy), oparte na zaawansowanych wynikach teorii liczb. Istotna jest ich złożoność obliczeniowa, decydująca o prędkości działania. Teoretycznie najszybsze są algorytmy działające w czasie wielomianowym. Nie wnikając w nieco techniczną definicję tego pojęcia, będziemy używać określenia „algorytm działający w czasie wielomianowym" jako synonimu stwierdzenia „algorytm działający szybko". Na marginesie odnotujmy, że algorytm testowania pierwszości polegający na kolejnym dzieleniu przez liczby mniejsze ma tak zwaną wykładniczą złożoność obliczeniową, a więc pod względem złożoności stanowi przeciwieństwo algorytmu działającego w czasie wielomianowym i dlatego nie nadaje się do użycia w przypadku „dużych" liczb naturalnych. Są jeszcze inne, poza złożonością

---

[80] Por. H.A. Helfgott, David J. Platt, *Numerical verification of the ternary Goldbach conjecture up to* $8.875 \cdot 10^{30}$. Exp. Math. 22(2013), no. 4, 406–409.

obliczeniową, kryteria, według których możemy klasyfikować algorytmy. Dla przykładu klasę wszystkich algorytmów dzielimy na algorytmy deterministyczne i probabilistyczne. Algorytmy pierwszej z wymienionych kategorii udzielają odpowiedzi pewnych (lub też nie udzielają odpowiedzi w ogóle), natomiast algorytmy probabilistyczne udzielają odpowiedzi poprawnych z pewnym ustalonym prawdopodobieństwem (zwykle bardzo bliskim 1). W wielu zastosowaniach praktycznych to nam w zupełności wystarcza, gdyż ryzyko popełnienia błędu mniejsze, powiedzmy od jednej milionowej, jest w wielu przypadkach akceptowalne. Algorytmy probabilistyczne mają tę przewagę nad algorytmami deterministycznymi, że działają zwykle znacznie szybciej. Z tych uwag widać, że w pewnym sensie najdoskonalszą klasą algorytmów są algorytmy deterministyczne działające w czasie wielomianowym. Przez długi czas było zagadnieniem otwartym, czy istnieją algorytmy tego typu rozwiązujące zagadnienie testowania pierwszości liczb naturalnych. Istotną przesłanką wskazującą, że tak jest w istocie, było skonstruowanie tak zwanego testu Millera[81]. Nie wnikając w szczegóły, jest to deterministyczny test pierwszości, o którym udowodniono, że działa w czasie wielomianowym przy założeniu Hipotezy Riemanna dla funkcji dzeta Dedekinda ciał kwadratowych. Praca Millera ukazała się w roku 1975. Jako ciekawostkę warto zaznaczyć, że niemal dziesięć lat wcześniej ten sam algorytm został zaproponowany przez matematyka radzieckiego M.M. Artjuhova i mimo że opublikowano go w Acta Arithmetica[82] w 1967 roku, został on niemal niezauważony. Fakt, iż przy założeniu uogólnionej Hipotezy Riemanna można skonstruować deterministyczny test pierwszości działający w czasie wielomianowym, wzbudził nadzieję na to, że można tej jakości algorytm zbudować bez zakładania żadnych nieudowodnionych hipotez. Stało się to dopiero w 2002 roku, gdy – ku zaskoczeniu wielu specjalistów – zrobiła to trójka matematyków hinduskich Manindra Agrawal, Neeraj Kayal oraz Nitin Saxena[83]. Na ich cześć test ten zwany jest testem pierwszości AKS.

---

[81] Gary L. Miller, *Riemann's hypothesis and tests for primality.* Seventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing (Albuquerque, N.M., 1975), pp. 234–239. Assoc. Comput. Mach., New York, 1975.

[82] M.M. Artjuhov, *Certain criteria for primality of numbers connected with the little Fermat theorem (Russian).* Acta Arith. 12(1967), 355–364.

[83] Praca ukazała się drukiem dwa lata później, por. Manindra Agrawal, Neeraj Kayal, Nitin Saxena, *PRIMES is in P*. Annals of Mathematics. 160(2)(2004), 781–793.

CZY HIPOTEZA RIEMANNA JEST PRAWDZIWA? ARGUMENTY „PRZECIW"

ARGUMENT „ANTYGEOMETRYCZNY"

Możliwa jest do pomyślenia sytuacja, w której Hipoteza Riemanna jest prawdziwa w przypadku „geometrycznych" funkcji dzeta i jednocześnie fałszywa dla $\zeta(s)$ *(lub innych klasycznych funkcji L).*

(Lokalne) funkcje dzeta rozważane w geometrii algebraicznej bardzo różnią się od funkcji L w teorii liczb. Np. są one funkcjami wymiernymi p^{-s}. Dlatego można mieć wątpliwości, czy rzeczywiście twierdzenie Deligne'a (dowód Hipotezy Riemanna dla tych funkcji) jest dostateczną podstawą do optymizmu. Właściwym odpowiednikiem klasycznych funkcji L, a w szczególności funkcji dzeta Riemanna, są tak zwane globalne funkcje dzeta rozmaitości algebraicznych będące nieskończonymi iloczynami „interesujących" części funkcji lokalnych. Jednak o nich w ogólności niewiele wiadomo. Samo udowodnienie dla nich istnienia przedłużenia analitycznego jest osobnym i niebanalnym wyzwaniem. Stwierdzenie tego faktu w bardzo szczególnym przypadku funkcji L wymiernych krzywych eliptycznych poprzez ukazanie ich związku z funkcjami L form modularnych ma doniosłe konsekwencje w teorii równań diofantycznych, w szczególności pociąga za sobą prawdziwość słynnego Wielkiego Twierdzenia Fermata[84].

ARGUMENT SCEPTYKA TECHNIKI OBLICZENIOWEJ

Obliczenia numeryczne mogą posiadać zbyt mały zakres, aby być miarodajnymi.

Wzorowi (14) można nadać następującą bardziej precyzyjną postać

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi e} + \frac{7}{8} + S(T),$$

gdzie

$$S(T) = \frac{1}{\pi}\arg\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) + O\left(\frac{1}{T}\right),$$

[84] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem.* Annals of Mathematics. 141(3)(1995), 443–551.

przy czym $\arg \zeta(\frac{1}{2} + it)$ oznacza odpowiednio zdefiniowaną gałąź argumentu funkcji dzeta Riemanna (dokładną definicję, ze względu na jej techniczny charakter, pomijam). Atle Selberg udowodnił[85] w 1944 roku, że dla dowolnej liczby naturalnej k, przy T dążącym do nieskończoności, mamy

$$\int_0^T |S(t)|^{2k}\,dt \sim \frac{(2k)!}{k!(2\pi)^{2k}} T(\log\log T)^k.$$

Wynika stąd, że $S(T)$ przyjmuje wartości rzędu

$$\sqrt{\log\log T}$$

dla nieskończenie wielu liczb rzeczywistych $T \to \infty$. W szczególności funkcja ta jest nieograniczona. Problem polega na tym, że funkcja $\sqrt{\log\log T}$ rośnie niezwykle wolno i w zakresie objętym obliczeniami jest ona praktycznie stałą:

$$\sqrt{\log\log T} < 3 \quad \text{dla} \quad T \leqslant 10^{3519}$$

oraz

$$\sqrt{\log\log T} < 100 \quad \text{dla} \quad T \leqslant 10^{10^{4342}}.$$

Nic więc dziwnego, że $|S(T)| < 1$ dla $T < 280$ oraz $|S(T)| < 2$ dla $T < 6800000$. Nie jest znana żadna wartość T, dla której $|S(T)| > 3$.

Powyższe fakty dają podstawę do spekulacji na temat wartości obliczeń numerycznych przy weryfikacji prawdziwości Hipotezy Riemanna. Sceptyk może tutaj argumentować, że tylko ich „skromny" zakres powoduje, iż nie możemy znaleźć żadnego zera leżącego poza prostą krytyczną. To, co się dzieje „naprawdę", ukryte jest w zakresie, gdzie funkcja $S(T)$ wykonuje oscylacje o dużej amplitudzie, a więc tam, gdzie nasza współczesna technika obliczeniowa jest bezradna.

ARGUMENT ADMIRATORA MATEMATYKÓW

Dlaczego mimo wysiłku kilku pokoleń matematyków, w tym wielu bardzo wybitnych, osiągnięte rezultaty są bardziej niż skromne?

---

[85] A. Selberg, *On the remainder in the formula for $N(T)$, the number of zeros of $\zeta(s)$ in the strip* $0 < t < T$, Avh. Norske Vid. Akad. Oslo. I. 1944, (1944). no. 1, 27 pp.

Na przykład znane obszary wolne od zer zbiegają do prostej $\sigma = 1$, a nie, jak przewiduje Hipoteza, do prostej krytycznej. Być może nie jest to wynikiem słabości opracowanych metod, lecz odbiciem rzeczywistości, która jest bardziej skomplikowana, niż nam się to wydaje...

JAK MOŻNA UDOWODNIĆ HIPOTEZĘ RIEMANNA?

Tego oczywiście nikt nie wie. Hipoteza jest cały czas atakowana przy użyciu rozmaitych metod. Co roku pojawia się wiele manuskryptów, których autorzy twierdzą, że znaleźli dowód. Zwykle błąd w rozumowaniu jest wykrywany, zanim praca zostanie przesłana do redakcji jakiegoś poważnego czasopisma naukowego. Wiele z tych opracowań nie przedstawia żadnej wartości poznawczej, zdarzają się takie, które zawierają nietrywialną myśl. Wiele warunków równoważnych Hipotezie ma swoją genezę w nieudanej próbie dowodu. Jedna z najbardziej znanych historii tego typu jest związana z T. J. Stieltjesem[86], który w 1885 roku w liście do Ch. Hermite'a[87] twierdził, że potrafi dowieść, iż dla pewnej stałej dodatniej c_0 oraz dla wszystkich liczb $x \geqslant 1$ prawdziwa jest następująca nierówność

$$\left|\sum_{n \leqslant x} \mu(n)\right| \leqslant c_0 \sqrt{x}, \tag{23}$$

gdzie $\mu(n)$ oznacza funkcję Möbiusa. Z tego stwierdzenia wynika natychmiast prawdziwość Hipotezy Riemanna. Niestety Stieltjes nigdy nie opublikował swojego dowodu i jest bardzo prawdopodobne, że znalazł w nim błąd. Warto dodać, że jego twierdzenie do dnia dzisiejszego nie zostało udowodnione i przypuszcza się, że jest fałszywe. Niemniej jednak w próbie Stieltjesa była zawarta pewna ciekawa idea, a mianowicie związek Hipotezy z funkcją Möbiusa. Związek ten w sposób ścisły został przez nas opisany w części omawiającej warunki równoważne z Hipotezą Riemanna, por. wzór (17). Dodajmy na marginesie, że tak zwana Hipoteza

---

[86] Thomas Joannes Stieltjes (1856–1894) – matematyk holenderski.
[87] Charles Hermite (1822–1901) – matematyk francuski.

Mertensa[88], postulująca, że we wzorze (23) można przyjąć $c_0 = 1$ okazała się nieprawdziwa[89].

Pytając o to, jak można udowodnić Hipotezę Riemanna, można mieć na myśli wskazanie jakiejś ogólnej idei lub kierunku badań, które mogą doprowadzić do rozstrzygnięcia. Wydaje się, że najbardziej obiecujące są w chwili obecnej dwa podejścia.

Pierwsze z nich jest dość oczywiste. Skoro najbardziej spektakularny sukces odnotowano w odniesieniu do hipotez Weila, to narzucającą się ideą jest próba uogólnienia dowodu Deligne'a. Od razu jednak pojawiają się trudności. Dowód odpowiednika Hipotezy Riemanna dla funkcji dzeta rozmaitości algebraicznych nad ciałami skończonymi opierał się na środkach typowych dla geometrii, takich jak na przykład kohomologie etalne. Aby przenieść dowód na przypadek funkcji dzeta Riemanna, należałoby zbudować odpowiednik wspomnianej teorii kohomologii dla charakterystyki zero. Mimo podejmowanych prób w tym kierunku, nie udało się tego dokonać.

Drugim podejściem jest pomysł pochodzący od D. Hilberta[90] i G. Pólyi, polegający na tym, aby skonstruować operator hermitowski działający na przestrzeni Hilberta, którego wartościami własnymi są liczby $i(\rho - \frac{1}{2})$, gdzie ρ przebiega zbiór nietrywialnych zer funkcji dzeta Riemanna. Z ogólnej teorii takich operatorów wiadomo, że ich wartości własne są liczbami rzeczywistymi. Zatem, gdyby program Hilberta-Pólyi został zrealizowany, oznaczałoby to, że zera nietrywialne leżą na prostej krytycznej, a więc, że Hipoteza Riemanna jest prawdziwa. Mimo wielu prób do dnia dzisiejszego nie udało się takiego operatora skonstruować. Niemniej jednak prace w tym kierunku doprowadziły do znalezienia głębokich związków między teorią funkcji dzeta a teorią macierzy losowych. Odkryto bowiem, że części urojone zer zachowują się podobnie, jak wartości własne dużych macierzy losowych. Tematyka ta ma swoje źródło w pracy matematyka amerykańskiego H.L. Montgomery'ego, który na początku lat 70. ubiegłego stulecia badał statystyczny rozkład wartości odległości między kolejnymi zerami nietrywialnymi funkcji dzeta Rie-

---

[88] Franciszek (Franz) Mertens (1840–1927) – matematyk polsko-austriacki, profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego.

[89] A.M. Odlyzko, H.J.J. te Riele, *Disproof of the Mertens conjecture*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 357(1985), 138–160.

[90] David Hilbert (1862–1943) – matematyk niemiecki.

manna i w oparciu o swoje czysto teoretyczne badania doszedł do wniosku, że podlegają one ścisłym prawom, które – jak się wkrótce okazało – są tożsame z prawami rozkładu wartości własnych dużych macierzy losowych. Te ostatnie były (i nadal są) badane przez fizyków atomowych. Ten dość nieoczekiwany związek teorii liczb z fizyką matematyczną zaowocował rozwojem zupełnie nowego kierunku badań, wspólnego dla dwóch pozornie bardzo odległych dziedzin.

CZY ŚWIAT BYŁBY GORSZY, GDYBY HIPOTEZA RIEMANNA BYŁA FAŁSZYWA?

Myślę, że cierpliwy Czytelnik, jeśli dotarł do tego miejsca niniejszego eseju, ma już wyrobioną własną opinię. Zdecydowana większość współczesnych matematyków jest przekonana o prawdziwości Hipotezy Riemanna. Warto jednak zaznaczyć, że wśród wybitnych matematyków byli i tacy, którzy mieli inną opinię. W środowisku teoretyków liczb najczęściej wymienia się przy tej okazji dwa nazwiska: P. Turán[91] i J.E. Littlewood. Obaj byli wybitnymi znawcami problematyki, a zatem trudno ich opinie ignorować. Z drugiej strony w ostatnich dziesięcioleciach przybyło więcej argumentów „za" niż „przeciw". Poniżej przytaczam opinie czterech znanych, współczesnych teoretyków liczb. Znamienne jest to, że wszystkie wypowiedzi zdają się odnosić do argumentu estetycznego, jak widać szczególnie bliskiego matematykom. Zawierają one w pewnym sensie twierdzącą odpowiedź na pytanie zawarte w tytule tego eseju.

> Enrico Bombieri[92]: *„The failure of the Riemann hypothesis would create havoc in the distribution of prime numbers. This fact alone singles out the Riemann hypothesis as the main open question of prime number theory."*[93]

---

[91] Pál Turán (1910–1976) – matematyk węgierski.

[92] E. Bombieri, *Problems of the Millenium: the Riemann Hypothesis*. Clay Institute, Oficial problem description, http://www.claymath.org/millennium-problems/riemann-hypothesis

[93] Błędność Hipotezy Riemanna spowodowałaby spustoszenie w rozkładzie liczb pierwszych. Już sam ten fakt wyróżnia Hipotezę Riemanna jako główne zagadnienie otwarte teorii liczb pierwszych.

Peter Sarnak[94]: *„If [the Riemann Hypothesis is] not true, then the world is a very different place. The whole structure of integers and prime numbers would be very different to what we could imagine. In a way, it would be more interesting if it were false, but it would be a disaster because we've built so much round assuming its truth."*[95]

Steve Gonek: *„If there are lots of zeros off the line – and there might be – the whole picture is just horrible, horrible, very ugly. It's an Occam's razor sort of thing, you either have absolutely beautiful behaviour of prime numbers, they behave just like you want them to behave, or else it's really bad."*[96]

Henryk Iwaniec: *„Mother Nature has such beautiful harmonies, so you couldn't say that something like [the Riemann Hypothesis] is false."*[97]

---

[94] Ten cytat, jak i dwa następne, pochodzi z książki K. Sabbagh, *Dr. Riemann's zeros*. Atlantic Books, 2002.

[95] Gdyby [Hipoteza Riemanna] nie była prawdziwa, to świat byłby zupełnie inny. Cała struktura liczb naturalnych i liczb pierwszych byłaby bardzo różna od tego, co możemy sobie wyobrazić. W pewnym sensie byłoby to bardziej interesujące, ale byłoby to katastrofą, gdyż tak wiele zbudowaliśmy na założeniu, że [Hipoteza Riemanna] jest prawdziwa.

[96] Jeżeli jest wiele zer poza prostą [krytyczną] – a może tak być – to cały obraz jest straszny i bardzo brzydki. Jest to kwestia brzytwy Okhama, albo mamy bezwzględnie piękne zachowanie się liczb pierwszych, zgodne z naszymi oczekiwaniami, albo jest bardzo źle.

[97] Matka Natura posiada tak piękną harmonię, że nie można twierdzić, aby coś takiego, jak Hipoteza Riemanna, było nieprawdą.