CZY POWINNA NAS DZIWIĆ MATEMATYCZNOŚĆ ŚWIATA?

Ks. Jerzy Dadaczyński

Wydział Filozoficzny
Uniwersytetu Papieskiego Jana Pawła II w Krakowie

Tekst niniejszy stanowi nieznaczne rozszerzenie wykładu wygłoszonego podczas Konferencji w Poznaniu. Zakres samego wystąpienia konferencyjnego został istotnie zmieniony (ograniczony) po wystąpieniu prof. Romana Murawskiego, który w sposób wyczerpujący i syntetyczny omówił kwestię matematyczności świata z punktu widzenia poszczególnych szkół filozofii matematyki, co miało być również celem wystąpienia autora niniejszego artykułu. Dlatego prezentowany tekst dziedziczy zmianę dokonaną w wystąpieniu i jest rozumiany jako pewne dopowiedzenie do artykułu prof. Romana Murawskiego, który ukazuje się w tym samym tomie. Stąd celowo nie są w nim podejmowane pewne kwestie sygnalizowane w tekście prof. Murawskiego. Stąd też – w oczywisty sposób – nie może on aspirować do miana syntetycznej i wyczerpującej prezentacji kwestii matematyczności przyrody. Eksponowane są natomiast w niniejszym tekście pewne zagadnienia, które niezbyt często pojawiają się w dyskusji fenomenu matematyczności świata[1].

Wystarczy tu chociażby wskazać filozofię pitagorejczyków, którzy zauważyli, systematycznie podjęli i przedstawili pierwsze rozwiązanie kwestii matematyczności świata. Poruszona zostanie również sprawa rachunku różniczkowego i całkowego Newtona i Leibniza. Ich *calculus*

[1] Matematyczność świata rozumie się tutaj jako jego cechę, natomiast matematyzowalność świata jako możliwość opisywania (tłumaczenia) go w języku matematyki.

z jednej strony uchodzi za paradygmat fragmentu języka matematyki, który pozwolił opisać istotne aspekty świata, z drugiej jednak – i na to zwrócono uwagę – nie spełniał u swych początków starożytnych standardów teorii matematycznej i zyskał je dopiero w XIX wieku dzięki pracom Bernharda Bolzana, Augustina Cauchy'ego i Karla Weierstrassa, a więc ponad półtora wieku po wejściu w życie zasad nowożytnej fizyki. I wreszcie przypomniana jest starożytna teoria astronomiczna Ptolemeusza, zmatematyzowana, dająca dobre przewidywania, która ostatecznie – z fizycznego punktu widzenia – okazała się być fałszywa. Może to być pewna przestroga dla fascynacji powszechną stosowalnością języka matematyki w opisie świata. W każdym razie wskazuje na to, że sam fakt skutecznej stosowalności matematyki w teorii przyrodniczej nie musi być jeszcze gwarantem poprawności samej teorii.

Jeśli chodzi o tytułowe pytanie, to zadaniem niniejszego tekstu jest pokazanie, że odpowiedź na nie jest funkcją przyjmowanej filozofii matematyki, a dokładniej jej ontologii. Przy czym poszczególne koncepcje ontologii matematyki same podlegają ocenom, które determinują wartość rozwiązań problemu matematyczności świata.

SZKOŁA PITAGOREJSKA

Zasadniczym fundamentem filozofii pitagorejczyków była matematyka, przede wszystkim arytmetyka. Uprawiali oni matematykę jako naukę w tym znaczeniu, że dowodzili twierdzeń, co zapoczątkowane zostało właśnie w starożytnej Grecji. Znali oni pewną grupę twierdzeń dotyczących liczb naturalnych, zajmowali się już dzielnikami tych liczb i w konsekwencji znane im było pojęcie liczb pierwszych. Znali też liczby wymierne (dodatnie), i potrafili w ich dziedzinie wskazać działania, co było znacznym postępem w stosunku do matematyki babilońskiej, w ramach której wprowadzono wyłącznie ułamki o mianowniku 60 oraz o mianowniku równym kwadratowi tej wartości. Pitagorejczycy zdawali sobie sprawę z kongruencji w dziedzinie liczb wymiernych i z tego, iż poszczególne, wyróżnione przy jej pomocy, klasy liczb wymiernych mogły być reprezentowane przez jeden, należący do danej klasy, ułamek.

Co istotne dla prowadzonych rozważań, pitagorejczycy odkryli, iż pewne relacje w świecie zewnętrznym można opisywać przy pomocy stosunków liczb naturalnych (ułamków). To spostrzeżenie z zakresu akustyki uogólnili na cały świat fizyczny. Dysponując odpowiednią matematyką (arytmetyką), twierdzili nie tylko, że świat da się opisać przy pomocy liczb naturalnych i ich stosunków (świat jest matematyzowalny), ale uważali wręcz, że świat jest matematyczny i to w sposób skrajny – podstawowym „budulcem" świata są liczby.

Z tekstów Arystotelesa wynika, że za jego czasów ścierały się dwie interpretacje „arytmetycznej" ontologii świata pitagorejczyków: formalna i materialna. Pierwsza, „popularniejsza," mówiła, że liczby to czynnik „formalny" świata, druga stwierdzała, że liczby są wręcz czynnikiem „materialnym" świata[2].

W każdym razie pitagorejczycy stanowili pierwszą szkołę filozoficzną, która sformułowała tezę o matematyczności świata. Możliwość zbudowania tego poglądu wynikała z dwu przynajmniej przesłanek. Po pierwsze, pitagorejczycy dysponowali odpowiednio rozbudowaną – jak się wówczas wydawało – arytmetyką: liczb naturalnych i ich stosunków (arytmetyką liczb wymiernych dodatnich). Po wtóre, jako wczesna formacja filozofii greckiej poszukiwali oni *arche*, pierwiastka, z którego jest zbudowany świat. Po serii naturalistycznych rozwiązań tej kwestii: ziemia, woda, powietrze, ogień, zaprezentowali bardziej wyrafinowane rozwiązanie tego problemu. Według pitagorejczyków poszukiwane *arche* to liczby (rozumiane jako mnogości jednostek).

Koncepcja pitagorejczyków bardzo szybko legła w gruzach. Powodem było odkrycie – dokonane w ich własnym środowisku – niewymierności. Okazało się, że stosunek dwóch odcinków nie zawsze może być ujmowany jako stosunek dwóch liczb naturalnych. To automatycznie było aplikowalne w świat fizyczny: stosunek dwóch przebytych dróg – np. przekątnej kwadratu o boku jednostkowym oraz samego boku „naszkicowanych" na jakimś placu w Wielkiej Grecji – nie był wyrażalny jako stosunek dwóch liczb naturalnych. Znana pitagorejczykom matematyka okazała się jednak za „słaba", by przy jej pomocy matematyzować rzeczywistość fizyczną. Tym bardziej twierdzić, że jest ona „zbudowana" z matematycznego *arche*.

W konsekwencji odkrycie niewymierności prowadziło do obalenia pitagorejskiej filozofii, a konkretnie do obalenia pitagorejskiej ontologii. Niemniej szkoła z Wielkiej Grecji zbudowała pierwszą historycznie

---

2 Por. W. Tatarkiewicz, *Historia filozofii*, t. 1, PWN, Warszawa 1988, s. 44.

koncepcję próbującą tłumaczyć matematyczność świata. Zresztą samo dostrzeżenie pewnych związków o charakterze matematycznym w świecie fizycznym i teoretyczne rozszerzenie tego spostrzeżenia na większość aspektów świata fizycznego oraz konsekwentnie wyartykułowanie tezy o matematyczności świata też należy do osiągnięć szkoły pitagorejskiej.

PLATON

Stwierdzona przez pitagorejczyków matematyczność świata stosunkowo szybko znalazła nowe uzasadnienia w dwóch wielkich koncepcjach filozoficznych powstałych w starożytnej Grecji: w systemach Platona i Arystotelesa.

Według Platona „prawdziwą" rzeczywistością jest świat idei: obiektów pozaczasowych i pozaprzestrzennych. Świat fizyczny jest ich „cieniem", niedoskonałym odwzorowaniem. Człowiek ma dostęp poznawczy do idei na drodze anamnezy, jego dusza istniała przed wejściem w świat materialny w świecie idei, dlatego człowiek „przypomina" sobie idee. Jednocześnie postrzega „ślady" idei w świecie fizycznym, który jest niedoskonałym odwzorowaniem świata idei.

Co istotne, Platon stwierdza, że obiekty opisywane przez matematykę są ideami. A jeśli tak, to jak inne idee są odzwierciedlane w świecie fizycznym. Dlatego też świat fizyczny jest matematyczny.

ARYSTOTELES

Arystoles, który nie akceptował rozbudowanej ontologii Platona, przede wszystkim zaś istnienia obiektów pozaprzestrzennych i pozaczasowych, zbudował, w opozycji do swojego poprzednika, ontologię hylemorficzną. Twierdził on, że istnieją jedynie obiekty czasowe i przestrzenne. Wszystkie one zbudowane są z materii i formy. W pewnym sensie formy obiektów zastępowały idee Platona. Inaczej niż u Platona nie tworzyły one własnego świata. Formy przedmiotów zawsze były związane z materią, z którą konstytuowały konkretne obiekty. Formy posiadały „składowe" matematyczne, np. geometryczne: koło, kwadrat, elipsa, odcinek itd,. lub arytmetyczne: długość obiektu, liczność elementów, z których dany obiekt był złożony. Poznanie owych matematycznych „składowych" form dokonywało się najpierw na drodze empirycznej, jak poznanie przedmiotów konkretnych. Drugim etapem była rozumowa „izolacja" owych form z ich matematycznymi „składowymi". Mówi się również w tym wypadku o procesie „abstrakcji", a nawet idealizacji.

Kwestia matematyczności świata fizycznego jest rozwiązana w systemie Stagiryty bardzo prosto. Rzeczywistość fizyczna jest matematyczna, ponieważ każdy obiekt oprócz materii posiada formę, ta zaś zawiera „składowe" matematyczne.

CALCULUS NEWTONA I LEIBNIZA

Powstanie rachunku różniczkowego i całkowego w XVII i XVIII wieku oznaczało – jak się uważa – powstanie najistotniejszego, klasycznego narzędzia matematycznego stosowanego w opisie świata. To był moment przełomowy w procesie matematyzacji rzeczywistości. Powstanie rachunku jest nieodłącznie związane z narodzinami i błyskawicznym rozwojem fizyki Newtonowskiej.

Trzeba jednak w tym miejscu postawić pytanie: czy *calculus* spełniał wymogi stawiane teoriom matematycznym? Odpowiedź na to pytanie jest istotna, gdyby bowiem wymóg matematyczności rachunku nie był spełniony, to powstaje problem, czy fizyka XVII i XVIII wieku posługiwała się teorią matematyczną *sensu stricto* w opisie świata.

Trudno, rzecz jasna, oceniać matematyczność rachunku różniczkowego w XVII i XVIII wieku, przykładając do niego dzisiejsze wymogi metodologii matematyki. Można jednak zastosować w tym miejscu kryteria nałożone na matematykę w starożytności – wypracowane przez Arystotelesa i zastosowane przez Euklidesa w I księdze *Elementów*.

Calculus Isaaca Newtona i Gottfrieda Leibniza nie jest podany w wersji aksjomatycznej. Ten ideał greckiej matematyki został jednak zrealizowany tylko w planimetrii Euklidesa i – poza matematyką – w sylogistyce Arystotelesa. Inne dziedziny matematyki były podane metodą nieaksjomatyczną, a powszechny wymóg aksjomatyzacji zaczęto realizować poza geometrią dopiero pod koniec XIX (arytmetyka Richarda

Dedekinda i Giuseppe Peana oraz wcześniejsze próby Hermanna Grassmanna) i na początku XX wieku. Odnoszenie zatem kryterium aksjomatyzacji do początków rachunku różniczkowego i całkowego jest nieadekwatne.

Natomiast logiczne kryterium Arystotelesa – niesprzeczności nauki – nie było spełniane przez rachunek Newtona i Leibniza[3]. Na przykład fluksje i fluenty Newtona bywały – w ramach jednego rozumowania – traktowane równocześnie jako spełniające i niespełniające aksjomatu Eudoksosa-Archimedesa. Ich jednoczesna archimedesowość i niearchimedesowość były wyrazem sprzeczności tkwiących w ówczesnych podstawach rachunku różniczkowego i całkowego.

Innymi mankamentem rachunku był – w niektórych jego obszarach – jego mechaniczny i geometryczny charakter. Ta ostatnia cecha wiązała się z istotną dla całego ówczesnego rachunku nieanalitycznością[4].

Mechaniczny charakter rachunku przejawiał się w tym, że funkcje rozważano często jako fizyczny ruch, a zasadnicze pojęcia analizy podawano w jego kategoriach, np. zamiast o pochodnej funkcji mówiono o prędkości chwilowej. Tam gdzie nie wypracowano jeszcze odpowiednich wyrażeń analitycznych posługiwano się „metaforami" czy „oglądem" wziętymi z geometrii. Tak „dowodzono" twierdzeń o zerowaniu funkcji ciągłej z wartościami dodatnią i ujemną na końcach rozpatrywanego przedziału i konsekwentnie, fundamentalnego dla analizy twierdzenia o wartości pośredniej funkcji ciągłej. W ten sposób odwoływano się do metod niedozwolonych już w dowodzeniu twierdzeń planimetrii Euklidesa. W omawianych przypadkach dowód analityczny był niemożliwy, ponieważ do początku XIX wieku nie dysponowano analityczną definicją ciągłości funkcji w punkcie. Oczywistym brakiem rachunku

---

[3] Por. G.W. Leibniz, *Tentamen de motuum coelestium causius*, Acta Eruditorum 1669, w: G.W. Leibniz, *Mathematische Schriften*, Bd. 5, Hrsg. C. Gerhardt, Olms, Hildesheim 1971 (Reprint d. Ausgabe Halle 1858), s. 320–328; G.W. Leibniz, *Isbrannuje otryski iż matiematiczeskich soczinienij*, pieriev. A.P. Juszkiewicz, Akademia Nauk SSSR, Moskva 1948, s. 189.

[4] Tym tendencjom wyraźnie sprzeciwiał się Leonhard Euler. Znalazło to wyraz w trzech jego podręcznikach: L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, vol. 1–2, Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios, Lausannae 1748; L. Euler, *Institutiones calculi differentialis*, vol. 1–2, Academia Imperialis Scientiarum, Petropoli 1755; L. Euler, *Institutiones calculi integralis*, vol. 1–3, Academia Imperialis Scientiarum, Petropoli 1768–1770.

z XVIII wieku był też brak ściśle ufundowanej arytmetyki liczb rzeczywistych.

Można więc zasadnie twierdzić, że *calculus* w XVIII wieku nie spełniał kryteriów nałożonych na matematykę przez Arystotelesa i Euklidesa. Tym bardziej, rzecz jasna, nie spełnia dzisiejszych kryteriów matematyczności teorii.

Czy zatem posługiwanie się rachunkiem Newtona i Leibniza w opisie świata mogło być w XVIII wieku traktowane jako matematyzacja świata? Nie miał co do tego wątpliwości Kant, stawiając w 1781 roku pytanie o to, jak możliwe jest matematyczne przyrodoznawstwo. Założeniem tego pytania była akceptacja tezy, że (newtonowskie) przyrodoznawstwo jest matematyczne. Jednak – jak pokazano – przyłożenie do rachunku w jego XVIII-wiecznej postaci kryteriów wypracowanych w starożytności dyskwalifikowało *calculus* jako teorię matematyczną. Z drugiej strony trzeba stwierdzić, że *calculus* powstawał prawie równocześnie z fizyką Newtona i był na jej potrzeby, w dużej mierze, rozwijany. Nie był jeszcze wtedy teorią matematyczną *sensu stricto*, jednak do połowy XIX wieku udało się go tak ufundować, by spełniał kryteria nakładane na matematykę. To przede wszystkim zasługa Bolzana, który oparł *calculus* na arytmetyce liczb rzeczywistych i wyeliminował w ten sposób wielkości niearchimedesowe i sprzeczności z jego podstaw, uczynił go w pełni analitycznym, odrzucając bezwzględnie odwołania do „oglądu" geometrycznego i mechanicznego w dowodzeniu twierdzeń oraz zdefiniował analitycznie pojęcie ciągłości funkcji w punkcie i wiele innych ważnych pojęć rachunku Newtona i Leibniza[5]. Prace Bolzana z początku XIX wieku zostały dopełnione pracami Cauchy'ego i Weierstrassa.

W każdym razie *calculus*, najważniejsze narzędzie matematycznego opisu świata, stanowi mocny przykład, że „matematyczna" teoria ujmująca ważne aspekty świata wcale u swych początków, mimo zasadniczych sukcesów jej zastosowań w opisie świata, nie musi być matematyczną *sensu stricto*.

---

[5] B. Bolzano, *Der binomische Lehrsatz*, Prag 1816, Reprint w: B. Bolzano, *Early Mathematical Works*, Institute of Czechoslovak and General History CSAS, Prague 1981, s. 253–415; B. Bolzano, *Rein analytischer Beweis*, Prag 1817, Reprint w: B. Bolzano, *Early Mathematical Works*, Institute of Czechoslovak and General History CSAS, Prague 1981, s. 417–467.

Trzeba też stwierdzić, że o ile przedstawiciele matematyków i fizyków byli zafascynowani możliwościami zastosowań rachunku Newtona i Leibniza, to opozycja wobec niego tworzyła się w niektórych kręgach filozoficznych. Przede wszystkim brytyjscy empiryści krytykowali *calculus* Newtona i Leibniza oraz budowaną przy jego pomocy fizykę.

George Berkeley zaatakował rachunek, wykorzystując wprowadzone przez siebie kryterium istnienia:

> *x* istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy *x* jest postrzegane.

Twierdził on, że wielkości nieskończenie małych nikt nie jest w stanie postrzec, konsekwentnie zatem nie istnieją wielkości, na których *calculus* był zbudowany i dlatego sam rachunek nie ma żadnego sensu[6].

Poza tym Berkeley z Davidem Hume'em przeprowadzili krytykę dwóch kategorii, bez których fizyka ich czasów nie mogła się obejść: substancji i przyczyny. Najpierw Berkeley odrzucił istnienie substancji materialnych, zaś potem Hume odrzucił istnienie wszelkich substancji, a ponadto podważył kategorię przyczyny.

IMMANUEL KANT

W takiej sytuacji problemowej powstawała *Krytyka czystego rozumu* (1781) Kanta. Filozof z Królewca, wbrew krytyce empirystów i zgodnie z rzeczywistością, przyjął istnienie przyrodoznawstwa opartego na rachunku Newtona i Leibniza. Jednak wobec filozoficznej krytyki pozostawił zasadnicze pytanie: jak to matematyczne przyrodoznawstwo jest możliwe? Odpowiedź na nie jest istotnym elementem *Krytyki.*

Według filozofa z Królewca czas i przestrzeń nie są – jak u Newtona – „zbiornikami", w których „zanurzony" jest świat fizyczny. Są one apriorycznymi formami naoczności podmiotu (u Kanta: transcendentalnego). Jeśli owe formy naoczności wolne są od bodźców zewnętrznych, to w nich – w czystej naoczności – podmiot konstruuje obiekty matematyki. Obiekty arytmetyki konstruowane są z apriorycznej formy czasu, natomiast obiekty geometrii są konstruowane z apriorycznej formy

6 G. Berkeley, *The Analyst*, Tonson, London 1734.

przestrzeni. Podmiot dokonuje konstrukcji, odwołując się do apriorycznych pojęć przedmiotów matematycznych. Opierając się na konstrukcji danego przedmiotu matematyki, podmiot formułuje twierdzenia dotyczące owego przedmiotu i ich dowodzi.

Świat jest również konstrukcją podmiotu. Kiedy bodźce zewnętrzne (ich „źródło" – rzeczy same w sobie pozostają niepoznawalne) docierają do podmiotu, nakładane są na nie aprioryczne formy naoczności podmiotu: czas i przestrzeń. W ten sposób podmiot konstruuje fenomeny. Kiedy dalej podmiot nakłada na zbiory fenomenów dwanaście kolejnych apriorycznych kategorii, przede wszystkim zaś kategorie przyczyny i substancji, to konstruuje on świat.

Jest on z konieczności matematyczny. Fenomeny bowiem, z których jest zbudowany, powstają – należy przypomnieć – przez nałożenie na wrażenia czasu i przestrzeni, a więc apriorycznych „źródeł" matematyki czystej. Podmiot transcendentalny, konstruując świat, nadaje mu w owej podwójnej konstrukcji matematyczny charakter.

Należy też w tym miejscu zauważyć, że naszkicowane koncepcje rozwiązania problemu matematyczności świata pitagorejczyków, Platona, Arystotelesa i Kanta, wskazują bardzo wyraźnie, że są one ostatecznie zdeterminowane akceptowanymi w nich ontologiami matematyki.

UNIFIKACJA MATEMATYKI

Aby pokazać współczesne stanowiska w zakresie ontologii matematyki i generowane przez nie rozwiązania problemu matematyczności świata, posiadające zresztą swe korzenie w tradycyjnych, już zarysowanych koncepcjach, trzeba odwołać się do dwóch procesów w dziejach matematyki:

1. Systematyzacji (unifikacji) matematyki XIX-wiecznej na bazie arytmetyki liczb naturalnych, a potem na bazie cantorowskiej teorii mnogości;
2. Uświadomienia zasadniczego podziału na syntaksę (język) i semantykę matematyki.

Systematyzacja matematyki to próba utworzenia z niej jednej „budowli", w której, mówiąc językiem „dzisiejszym", znajduje się modele pewnych teorii matematycznych w innych teoriach, powiązana czasami ze wskazaniem teorii „podstawowej", do której wszystkie inne teorie mogą być sprowadzone.

Systematyzacja matematyki w XIX wieku przebiegała w kilku etapach. Bolzanowi, Cauchy'emu i Weierstrassowi udało się ugruntować analizę matematyczną na arytmetyce liczb rzeczywistych. Weierstrass w swoich wykładach w latach 60. oraz Georg Cantor i Dedekind w latach 70. rozwiązali problem niewymierności i zbudowali arytmetykę liczb rzeczywistych na bazie arytmetyki liczb wymiernych. Znalezienie modelu arytmetyki liczb wymiernych w arytmetyce liczb całkowitych i tej ostatniej w arytmetyce liczb naturalnych nie przedstawiało żadnego problemu.

W swej pracy *Grundlagen der Geometrie* z 1899 roku David Hilbert posunął jeszcze dalej prace nad systematyzacją matematyki w XIX wieku. Wskazał on, że geometrie nieeuklidesowe, zbudowane w tymże wieku, posiadają modele w geometrii euklidesowej. W istocie Hilbert zebrał w całość dokonania Bernharda Riemanna, Felixa Kleina i Henry Poincarégo, którzy dla poszczególnych geometrii nieeuklidesowych wskazali takie modele. Hilbert poszedł jednak jeszcze dalej i wskazał, że dzięki pomysłowi Kartezjusza (geometria analityczna) nie tylko geometria euklidesowa, ale również geometrie nieeuklidesowe, w tym geometria Giuseppe Veronesego – „przez" geometrię euklidesową – posiadają modele w arytmetyce liczb rzeczywistych. Wobec ostatecznego oparcia arytmetyki liczb rzeczywistych na arytmetyce liczb naturalnych oznaczało to również włączenie geometrii do zbioru dyscyplin matematycznych redukowalnych do arytmetyki liczb naturalnych.

Ta ostatnia otrzymała swoją aksjomatykę dzięki Dedekindowi w roku 1888 i Peanowi w roku 1889. Powstało jednak pytanie: czy i na jakiej dyscyplinie bardziej podstawowej można oprzeć arytmetykę liczb naturalnych? Cantor twierdził, że na zbudowanej przez niego teorii mnogości, Gottlob Frege zaś, że na logice, jednak z wkomponowanym w nią pojęciem klasy (zbioru). Ten proces teoriomnogizacji matematyki przerwało odkrycie antynomii w ramach teorii mnogości. Zostały one jednak wyeliminowane przez nadanie teorii Cantora aksjomatyki Ernsta Zermela oraz, alternatywnie, przez wprowadzenie teorii typów przez Bertranda Russella. W ten sposób matematyka początku XX wieku otrzymała swoją dziedzinę podstawową w teorii mnogości. Redukcja ta została systematycznie przedstawiona w pracach Bourbakistów.

SYNTAKSA I SEMANTYKA MATEMATYKI

Pierwszą intuicję wyróżnienia syntaksy i semantyki matematyki można zauważyć już w *Elementach* Euklidesa. Została tam wprowadzona aksjomatyka, która opisuje starożytną teorię wielkości. Jest ona pojmowana w starożytności jako teoria powszechna (*katolicka*), ponieważ jest realizowana – dziś można by powiedzieć: posiada modele – w dwu podstawowych działach ówczesnej matematyki: geometrii i arytmetyce. Można by zatem pojmować aksjomatykę wielkości jako język, który posiada dwie semantyki – w „świecie" liczb i w „świecie" przedmiotów geometrycznych. Ten sposób dziejowego dochodzenia do jasnego rozróżnienia syntaksy i semantyki matematyki jest kontynuowany w XIX-wiecznej refleksji metageometrycznej związanej z wprowadzeniem geometrii nieeuklidesowych. Dla tych geometrii wskazywane są modele w geometrii euklidesowej. W pewnym sensie traktuje się teorie nieeuklidesowe jako języki, które posiadają swoje modele – semantykę – w klasycznej geometrii.

W fundamentalnym dziele Davida Hilberta *Grundlagen der Geometrie* z roku 1899 istnieje już jasne rozróżnienie na teorię geometryczną – pewien język – który może posiadać różne semantyki[7]. Uczony z Getyngi, w ramach budowania metamatematyki w latach 20. XX wieku, klarownie odróżnia język – sformalizowany – teorii matematycznych od semantyki sformalizowanego języka. Z metamatematycznego punktu widzenia interesuje go wyłącznie badanie samego języka, ale nie odmawia temu językowi semantyki. Nieco później pracami Tarskiego zostaje zwieńczony proces rozpoczęty w ramach metageometrii XIX wieku wyraźnym rozróżnieniem syntaktyki i semantyki teorii matematycznych. Semantyka budowana jest w teorii mnogości.

STANOWISKA W ONTOLOGII MATEMATYKI A PROBLEM MATEMATYCZNOŚCI ŚWIATA

Naszkicowane powyżej procesy unifikacji matematyki na bazie teorii mnogości oraz klarownego rozróżnienie syntaksy i semantyki matema-

[7] Por. D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Stuttgart 1899, 1968[10], s. 2.

tyki umożliwiły na początku XX wieku systematyczne i uproszczone[8] podjęcie kwestii ontologii matematyki i – konsekwentnie – związanego z nim problemu matematyczności świata.

Redukcja matematyki do teorii mnogości (Cantor, Frege, Russell, Bourbakiści) pozwala stwierdzić, że – na poziomie syntaktycznym – wszystkie pojęcia matematyki można zdefiniować przy pomocy pojęcia zbioru. Na poziomie semantycznym oznacza to tyle, że zbiory cantorowskie można traktować jako „budulec" zamierzonych semantyk teorii matematycznych. Zatem kwestia ontologii matematyki redukuje się, przy wyraźnym rozróżnieniu syntaksy i semantyki teorii matematycznych i przy przyjęciu opisanej wyżej redukcji, do pytania o status ontologiczny zbiorów cantorowskich. Trzeba jeszcze raz podkreślić, że ontologia matematyki jest ściśle związana, jak wskazują koncepcje pitagorejczyków, Platona, Arystotelesa i Kanta, z propozycjami rozwiązań sprawy matematyczności świata.

Nominalizm odpowiada na pytanie o ontologię matematyki stwierdzeniem, że nie ma żadnych obiektów matematycznych, nie istnieją – na żaden sposób – jakiekolwiek zbiory cantorowskie. Matematycy dysponują jedynie syntaksą matematyki, nie istnieje żadna semantyka języka matematyki. Rzecz jasna należy wtedy wyjaśnić, jak pojmuje się standardową semantykę teorii matematycznych, czyli teorię mnogości. Konsekwentni nominaliści stwierdzają, że ostatecznie modele teoriomnogościowe teorii matematycznych są też niczym innym, jak pewną syntaksą, językiem i niczym więcej.

Nominalizm nie daje żadnego rozwiązania problemu matematyczności przyrody. Nie może „lokować" w przyrodzie żadnych zbiorów ani ich „odzwierciedleń". Bowiem, według nominalistów, takich obiektów nie ma. Z tego samego powodu nie może być „nakładania" na świat przez podmiot zbiorów przezeń konstruowanych. Zresztą nominalizm nie ma takich ambicji i pozostawia kwestię matematyczności świata jako nierozwiązaną i nierozwiązywalną.

W przypadku realizmu skrajnego następuje faktyczne utożsamienie idei platońskich ze zbiorami. Uczynił to wprost sam twórca teorii mnogo-

---

[8] Ostatecznie kwestia ontologii matematyki została sprowadzona wyłącznie do statusu ontologicznego zbiorów cantorowskich. Rozstrzygnięcia tej ostatniej kwestii były w istocie powtórzeniem rozstrzygnięć w ramach średniowiecznego sporu o uniwersalia.

ści Cantor. Kierunek ten, który – jak się często podkreśla – reprezentuje większość twórczych matematyków, rozwiązuje kwestię matematyczności świata w sposób nakreślony przez Platona. Trzeba jednak zauważyć, że ci, którzy są określani jako „realiści" wśród matematyków, nie zawsze w pełni dziedziczą koncepcję greckiego filozofa. Owszem, są tacy, którzy przyjmują zarówno tezę o pozaczasowym i pozaprzestrzennym istnieniu przedmiotów matematycznych, o których mówi syntaksa matematyki, i jednocześnie podtrzymują tezę, że owa pozaprzestrzenna i pozaczasowa rzeczywistość jest w pewien sposób, przynajmniej częściowo, „odwzorowana" w świecie fizycznym. Ale obok tych, którzy przyjmują obydwie powyższe tezy, są i tacy, którzy przyjmują tylko pierwszą tezę, rozwiązującą sprawę semantyki matematyki, ale nie akceptują drugiej. W konsekwencji, mimo iż zaliczani są oni do dominującej wśród czynnych matematyków opcji realistycznej, nie posiadają narzędzi do wytłumaczenia matematyczności przyrody.

Jeśli chodzi o ścisły realizm, który zawiera w sobie rozwiązanie matematyczności przyrody, to natrafia on na zasadnicze trudności. Przede wszystkim realizm skrajny odwołuje się do bardzo rozbudowanej, nienaturalistycznej ontologii. Jest ona niezbędna również do tego, by wytłumaczyć matematyczność świata. Po wtóre, problem sprawia kwestia dostępu poznawczego do rzeczywistości pozaprzestrzennych i pozaczasowych zbiorów. Prezentowana przez Platona koncepcja anamnezy wymagałaby przyjęcia kolejnych mocnych założeń, chociażby z zakresu antropologii. Kurt Gödel starał się rozwiązać kwestię dostępu poznawczego do świata pozaprzestrzennego i pozaczasowego zbiorów, odwołując się do epistemologii Edmunda Husserla. Jednak pomysł Gödla – ostatecznie niezrealizowany przez niego – nie znalazł uznania.

Konkludując, trzeba stwierdzić, że choć ścisły realizm prezentuje rozwiązanie kwestii matematyczności świata, to jednak jest ono obciążone tak mocnymi założeniami, że nie może znaleźć powszechnej akceptacji.

Realizm umiarkowany, którego początek leży w systemie Arystotelesa, w bardzo prosty sposób tłumaczy matematyczność świata. Obiekty matematyczne – w prezentowanym podejściu są to cantorowskie zbiory – abstrahuje się z (kolekcji) przedmiotów materialnych. Możliwość „wydobycia" podstawowego „budulca" matematyki z rzeczywistości fizycznej jest świadectwem matematyczności świata.

Mimo łatwego tłumaczenia matematyczności świata samo stanowisko realizmu umiarkowanego jest trudne do przyjęcia.

Przede wszystkim, teoria mnogości operuje tylko takimi zbiorami, których elementami są wyłącznie zbiory. Takich zbiorów nie sposób abstrahować ze świata fizycznego. Jako pewną próbę rozwiązania tego problemu można by postrzegać zbudowanie przez Zermela w latach 30. XX wieku teorii mnogości z atomami. Jednak, po pierwsze, próba fundowania matematyki na tej teorii byłaby bardzo sztuczna. Po wtóre, nawet gdyby traktować owe atomy jako obiekty fizyczne, to przedstawiony poniżej kontrargument pokazuje, że i tak nie jest to rozwiązanie problemu realizmu umiarkowanego.

Kontrargument oparty jest na spostrzeżeniu Hilberta zawartym w artykule *Über das Unendliche*[9]. Matematyk z Getyngi stwierdza tam, odwołując się faktycznie do OTW Einsteina oraz teorii dotyczących mikroświata, że w świecie fizycznym nie istnieje nieskończoność. Tym bardziej nie można twierdzić, iż ze świata można wyabstrahować zbiory nieskończone. Zaś bez zbiorów nieskończonych nie sposób budować matematykę. Tym samym trudno obronić sam realizm umiarkowany, w ramach którego proponuje się proste rozwiązanie problemu matematyczności przyrody.

Według konceptualizmu, wiążącego się z zasady z różnymi formami konstruktywizmu, zbiory, podstawowy „budulec" matematyki, są konstruowane przez podmioty – niekoniecznie przez podmiot transcendentalny – i w myśli podmiotów bytują. Zbiory są „nakładane" na bodźce zewnętrzne i tak podmioty – po części przynajmniej – konstruują matematyczny świat.

To rozwiązanie idzie po linii konstruktywizmu, typowego dla Kanta. Ma ono tę przewagę nad realizmem umiarkowanym, że tłumaczy chociażby genezę takich zbiorów, których elementami są obiekty niefizyczne. Porównanie konceptualizmu (konstruktywizmu) z realizmem skrajnym pokazuje, że ten pierwszy kierunek nie wymaga zakładania bardzo mocnej ontologii typu platońskiego, która ponadto musiałaby mieć „odwzorowanie" w strukturach fizycznych świata, oraz nie wymaga rozwiązania problemu dostępu poznawczego do świata abstrakcyjnych zbiorów.

Oczywiście, konceptualizm i – w konsekwencji – jego rozwiązanie zagadki matematyczności świata posiada też istotne braki.

---

9 D. Hilbert, *Über das Unendliche.*, „Mathematische Annalen", 1926, nr 95, s. 161–190.

Pierwszy z nich, to sprawa nieskończoności: w wypadku wszelkich konstruktywizmów problem konstrukcji – przez podmiot – zbiorów nieskończonych, bez których nie ma matematyki. Trzeba jednak przypomnieć, że obydwa typy realizmu też mają bardzo poważny problem z nieskończonością. Umiarkowany wariant nie jest w stanie oddalić kontrargumentu budowanego na spostrzeżeniu Hilberta. Skrajny wariant realizmu „odsyła" zbiory nieskończone do rzeczywistości pozaczasowej i pozaprzestrzennej, ale nie jest w stanie, jak pokazały chociażby próby Gödla, rozwiązać problemu dostępu poznawczego do tego abstrakcyjnego świata.

Można by też w tym miejscu wspomnieć o próbach czynionych obecnie w ramach kognitywistyki, które mają pokazywać, wbrew zastanym schematom myślowym, możliwość konstruowania przez podmiot obiektów, przede wszystkim zbiorów, nieskończonych[10]. Wydaje się jednak, że dotychczasowe dokonania na tym polu nie są w pełni przekonujące.

Drugi zarzut kierowany przeciwko konceptualizmowi mówi, iż podmioty fizyczne – a w konsekwencji nawet podmiot transcendentalny z nich wyabstrahowany – są efektem ewolucji biologicznego „fragmentu" świata. Zatem konstrukcje matematyczne podmiotów są ostatecznie „produktem" matematycznego świata. Rzeczywistość nie jest (staje się) matematyczna, ponieważ podmiot „nakłada" na nią zbudowaną przez siebie matematykę, lecz podmiot pochodzi na drodze ewolucji z matematycznego świata i dlatego jest w stanie „(od)tworzyć" matematykę.

Ostatecznie należy stwierdzić, że filozofia nie dysponuje powszechnie akceptowalnym rozwiązaniem problemu matematyczności świata. Proponowane rozwiązania są funkcją przyjmowanych stanowisk w zakresie ontologii matematyki. Konsekwentnie wszystkie propozycje tłumaczenia problemu dziedziczą istotne wady poszczególnych stanowisk w zakresie ontologii. W świetle przedstawionych analiz najbardziej „naturalne" wydaje się być stanowisko konceptualizmu (konstruktywizmu). Jednak wobec wskazanych braków trzeba stwierdzić, odpowiadając na tytułowe pytanie, że matematyczność świata musi budzić zdziwienie.

---

[10] Przegląd osiągnięć nauk kognitywnych w kwestii genezy matematyki przedstawiają B. Brożek, M. Hohol, *Umysł matematyczny*, Copernicus Center Press, Kraków 2014.

ZAKOŃCZENIE: TEORIA PTOLEMEUSZA – RODZAJ *MEMENTO*?

To, że świat fizyczny daje się opisywać i tłumaczyć przy pomocy języka matematyki, jest niezaprzeczalne, mimo że pozostaje zagadką.

Trzeba jednak koniecznie podkreślić, że język matematyki nie jest jedynym narzędziem opisującym świat fizyczny. Można to również robić przy pomocy języka literatury – języka poety lub języka epickiego narratora. Świadczą o tym „pomniki" literatury światowej. Do tego nurtu należą również opisy świata – w tym jego genezy – wyrażone w językach religii. Także dzieci, przy pomocy własnego, często niezrozumiałego dla dorosłych języka opowiadają o tym, co je otacza.

Rzecz jasna, wspomniane języki nie dają możliwości przewidywania zdarzeń, co zazwyczaj charakteryzuje matematyczne ujmowania świata. Nie można jednak zaprzeczyć, że mówią one o innych niż matematyczne, niewątpliwie jednak ważnych aspektach rzeczywistości fizycznej.

Nie należy też mitologizować języka matematyki w tym sensie, że sama możliwość skutecznego zastosowania języka matematyki do opisu jakiegoś fragmentu świata ma stanowić gwarancję prawdziwości takiego opisu. Przy czym przez skuteczne zastosowanie wspomnianego języka rozumie się tutaj możliwość przewidywania przyszłych faktów.

Jako przykład można podać tutaj teorię epicykli i deferentów Ptolemeusza, mającą swe początki w pracach genialnego matematyka starożytności Eudoksosa[11]. Pozwalała ona w miarę precyzyjnie przewidywać położenie ciał niebieskich. Im więcej wprowadzano epicykli, tym przewidywania były dokładniejsze. Działo się to, rzecz jasna, kosztem ważnej cechy teorii naukowych, jaką jest i ich prostota, ale przewidywania

[11] Twierdzi się czasamiu, że zarówno teoria Ptolemeusza, jak i Kopernika nie są teoriami fizycznymi, ale matematycznymi. Na pewno nie należą one do mechaniki, ponieważ nie występują w nich pojęcia masy i siły. Nie odwołując się do nich, nie potrafią one dać odpowiedzi na pytanie: dlaczego ruchy planet odbywają się po takich, a nie innych torach? Z drugiej jednak strony, będąc tylko matematycznym opisem cyklicznych ruchów planet, dają w miarę trafne przewidywania ich przyszłych położeń. Warto też wspomnieć, że Kopernik mówił – choć nie było to częścią jego teorii – o istnieniu oddziaływania, które później znalazło się w teorii Newtona jako powszechna grawitacja (por. M. Kopernik, *O obrotach. Księga pierwsza,* tłum. M. Brożek, PWN, Warszawa 1953, rozdział IX).

stawały się coraz bardziej precyzyjne. Mikołaj Kopernik zastąpił system geocentryczny systemem heliocentrycznym. W ten sposób otrzymał on teorię o wiele prostszą, mógł znacznie zmniejszyć liczbę epicykli. Rzecz jasna teoria Kopernika wiązała się z przewrotem światopoglądowym, co znacznie opóźniło jej akceptację. Trzeba jednak dodać, że gdyby teoria Ptolemeusza nie była tak precyzyjna w przewidywaniu, to być może teoria Kopernika przyjęta by została nieco wcześniej. Ostatecznie zasadnicza idea Kopernika – wzmocniona badaniami Johannesa Keplera, zasadami fizyki Newtona oraz rachunkiem Newtona i Leibniza – zastąpiła teorię Ptolemeusza.

Bardzo długo jednak nie potrafiono wytłumaczyć, dlaczego starożytna koncepcja Ptolemeusza, oparta na błędnej wizji świata, dość precyzyjnie opisywała ruchy ciał niebieskich. Odpowiedź znaleziono dopiero w XIX wieku w ramach tzw. analizy fourierowskiej. Okazało się, że dowolną funkcję periodyczną można rozwinąć w szereg Fouriera, sumę funkcji kołowych (trygonometrycznych), dla dowolnej wartości tej funkcji okresowej, oczywiście przy zachowaniu tzw. warunków Dirichleta. Ponieważ ruch takich obiektów, jak planety, obserwowany z Ziemi, jest ruchem okresowym, to daje się on – na mocy wspomnianego rozwinięcia Fouriera – przedstawić przy pomocy składania ruchów kołowych. To zaś było podstawą teorii Ptolemeusza.

Teoria Ptolemeusza wydaje się być rodzajem ostrzeżenia dla wszystkich fascynujących się skutecznością bardzo szerokich współcześnie zastosowań matematyki w badaniach otaczającej człowieka rzeczywistości. Samo skuteczne zastosowanie matematyki nie musi być jeszcze gwarancją poprawnego opisu świata. A ostateczne wytłumaczenie skuteczności wadliwych matematycznych opisów świata może zawierać się w „głębokich" związkach wewnątrzmatematycznych teorii, które stosowane są w procesie pojmowania świata. Płynie stąd wniosek, że poszukiwanie, stwierdzanie tego typu „głębokich" związków i szeroko rozumiane badania „metamatematyczne", w swym założeniu bardzo „teoretyczne" i pozornie absolutnie niezwiązane z fizyczną, przyrodniczą i społeczną rzeczywistością, mogą mieć pewne znaczenie w regulowaniu opisu i tłumaczenia świata.